هندسه‌ی ابعاد

در فضای اقلیدسی

نیما دارابی

مرداد ۷۵ –اسفند ۷۶

فهرست

پیشگفتار

شاید برای موجود هوشمندی چون انسان که در جهانی سه‌بعدی زندگی می‌کند، گفتگو کردن درباره‌ی ابعاد بالاتر دشوار و حتا بیهوده بنماید، ولی با این وجود به نظر می‌رسد که اگر جهان ما سه‌بعدی نبود، باز هم همین قوانین ریاضیات و هندسه بر آن حاکم می‌بود. شاید بتوان گفت که علت آن است که گزاره هایی که ویژه‌ی جهان مادی اطراف ما هستند (مثل قوانین فیزیک) از قانون‌های ریاضی تأثیر می‌پذیرند، در حالی که قانون‌های ریاضی در چارچوب محدودیت‌های ناشی از قوانین فیزیک نمی‌گنجند. بدین ترتیب ما ناچار هستیم که قانون‌های ریاضی و هندسی را مستقل از جهانی که در آن زندگی می‌کنیم به حساب آوریم.

سه‌بعدی بودن جهان ما نباید جلوی اندیشیدن ما را به فضاهای فرابعدی[1] بگیرد. به بیانی دیگر باید بپذیریم که یک مغز سه‌بعدی می‌تواند به جهان‌های فرابعدی بیاندیشد و اصولاً فرآیند اندیشیدن چیزی نیست به جز چندی ارتباط که از هر گونه بعد عاری‌اند.

اگر چه این درست است که امروز برای ما درک جهان‌های بیش از سه‌بعدی ناممکن است، اما یک ریاضی‌دان حتی دردسر تجسم چنین جهانی را به خود نمی‌دهد. در رویارویی با این

[1] بنا بر قرارداد اگر بعد یک فضا بیشتر از ابعاد موجودی باشد که به آن فکر می کند، آن را فضایی فرابعدی گوییم.

مسایل او تنها تعمیم می‌دهد، محاسبه می‌کند، نتیجه می‌گیرد و این فرآیند صوری، کار چندان دشواری نیست. (دست کم از تجسم جهان‌های فرابعدی آسان‌تر است.)

هر چند که امروزه فضاهای فرابعدی در بسیاری از شاخه‌های دانش مانند آمار، اقتصاد، سیبرنتیک، انفورماتیک، مدیریت، مهندسی، و حتا پزشکی و زیست‌شناسی، خودنمایی می‌کنند. اما فضای فرابعدی که در این علوم از آنها نام برده می‌شود، آن چیزی نیست که مورد نظر ماست، بلکه تنها ابزاری است برای مرتب سازی و طبقه‌بندی و تحلیل داده‌ها. در این موارد فضاهای چندبعدی تنها از نظر جبری و در قالب‌های ماتریسی و برداری مورد بحث قرارمی‌گیرند. در این کتاب به طور دقیق همان جنبه‌ی هندسی مورد بررسی قرار گرفته است.

در این کتاب همان گونه که از نامش برمی‌آید، برخی از گفتارهای هندسه‌ی اقلیدسی در فضاهایی با بعد صحیح و نامعلوم بررسی شده‌اند. بیشتر مطالب به شیوه‌ی هندسه‌ی کلاسیک و اندکی از آنها به صورت‌های برداری، تحلیلی و جبری بیان شده‌اند. فضاهای مورد بحث همان گونه که پس از این گفته خواهد شد، تخت و بی‌کران بوده و در بررسی آنها اصول و قضایای هندسه‌ی اقلیدسی برقرارند. بنابراین از بررسی مسائل در فضاهای نااقلیدسی خودداری نموده‌ایم. همچنین نوشتارهای این کتاب به جز بخش پایانی صرفاً ریاضی هستند و همان گونه که گفته شد به مباحث فیزیک و جهانی که در آن زندگی می‌کنیم بستگی ندارند. از این رو همه‌ی ابعاد از جنس درازا در نظر گرفته شده‌اند و نیز به دلیل ایستایی توصیف های فرابعدی و و در نتیجه بی‌ارتباطی زمان به این گفتار، در زمره‌ی ابعاد در نظر گرفته نشده است.

کوشش بر آن بوده است که اثبات قضایا و به دست آوردن احکام جدید به دقت در سیستم اصل موضوعی انجام شده و از چشمه‌های نابه‌جای شهود –که برای فضاهای فرابعدی کاملا اعتبار خود را از دست می‌دهند –در اثبات قضایا استفاده نشده و فرآیند استنتاج صوری را مختل ننماید. به این منظور علاوه بر اصول هندسه‌ی اقلیدسی، یازده اصل هندسی مستقل از بعد –که بعد فضا در آنها به صورت پارامتر ظاهر شده و اصل موضوع‌ها محمول هایی از این پارامترها هستند –برای سیستم وضع شده است. این اصول در آغاز کتاب فهرست شده‌اند تا شما تکلیف خود را بدانید و در صورتی که با آنها مشکل دارید، به مطالعه ی کتاب ادامه ندهید.

به همین ترتیب قضایای ثابت شده هم مستقل از بعد بوده و به صورت محمول‌های عمومی از پارامتر بعد فضا مطرح شده‌اند. در نتیجه بسیاری از قضایای اساسی هندسه ی مسطحه یا

فضایی اقلیدسی با تثبیت بعد فضا، حالت خاص قضایای یادشده می‌باشند. در این کتاب بر مبنای این سنگ بنا و با وسواس بسیار، بالغ بر هشتاد قضیه اثبات شده است که در حال حاضر پنج تا از آنها باز مانده‌اند و به جا است که فعلا به عنوان اصول موضوعه به یازده اصل دیگر افزوده شوند. هر چند که نگارنده بنا بر شهودی که نمی‌داند تا چه اندازه قابل اتکا است، امیدوار است که این پنج گزاره قابل تحویل به اصول دیگر بوده باشند و در نتیجه نیازمند قدری زمان بیشتر برای بررسی شدن. از این رو آن‌ها تحت عنوان قضیه (با ذکر بدون اثبات) نام برده شده‌اند. ضمن این که نگارنده عمیقا امیدوار است که رخنه‌ای در روند صوری اثبات قضایای کتاب وجود نداشته باشد.

شایان ذکر است که پیش‌نیاز آموختن مطالب این کتاب، آشنایی کلی با هندسه‌ی اقلیدسی، ماتریس‌ها، فضای برداری، روابط بازگشتی، ضرب بردارها، آنالیز ترکیبی و بسط دوجمله‌ای خیام ـ نیوتون، تابع گاما و حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌باشد. درباره‌ی سایر موضوعات این کتاب که به نظر ناآشنا می‌آیند، تعریف اشکال هندسی، اصول موضوع هندسه‌ی ابعاد و اثبات قضایا به اندازه‌ی کافی گویا هستند. خواننده‌ی مبتدی در صورت آشنایی کلی با مباحث گفته‌شده به آسانی می‌تواند مطالب کتاب را فرا بگیرد.

لازم است که کوشش‌های دوست‌ام *محمود زرینه* که مرا از همراهی و همیاری خود بهره‌مند کرده‌اند، را ارج نهم.

در اینجا برخلاف معمول، دست من برای معرفی منابعی برای مطالعه ی بیشتر تهی است. مراجع ذکر شده در پایان، کتاب‌های عمومی و دبیرستانی هستند که گاه به آنها رجوعی صورت گرفته است و بیشتر برای خالی نبودن عریضه ذکر شده اند. در حقیقت برای نگارش این نوشتار، منبع خاصی به دست نیامد تا به کار گرفته شود. متأسفانه نگارنده هنوز نمی‌داند که آیا موضوعات مندرج در این سیاهه توسط دیگرانی نیز مورد بررسی قرار گرفته و یا نتایج به دست آمده پیشتر در جایی استنتاج شده است یا نه؛ هر چند که دور از ذهن به نظر می رسد که چنین کاری انجام نشده باشد. به هر حال انگیزش این کوشش کنجکاوی شخصی بود و موجب خوشبختی است اگر کسی بتواند این کوشش را آغازی نهد برای گام‌های بعدی.

نیما دارابی

تیر ۱۳۷۶

۱

مفاهیم و قضایای بنیادین

تعاریف نخستین

فضای اقلیدسی (S_n): همانند خط راست و صفحه از مفاهیم نخستین (تعریف نشده) است و در واقع یک فضای n بعدی است که تخت و بدون خمیدگی است و نیز از هر سو تا بی‌نهایت گسترده شده است. برای درک این مفهوم باید به برداشت‌های ذهنی بسنده کنیم، یا آنکه توصیقی شهودی چون تعریف ابوریحان بیرونی برای نقطه و خط و صفحه را چنین تعمیم دهیم: *فضای اقلیدسی ۱−n بعدی نهایت فضای اقلیدسی* n *بعدی است*. فراموش نکنید که هر فضا مجموعه‌ای غیر تهی از نقاط است. بنابر قرارداد فضای اقلیدسی n بعدی را در مباحث هندسی S_n و در مباحث برداری و تحلیلی IR^n می‌نامیم. n را بعد یا تعداد ابعاد فضای n بعدی می‌نامیم.

زیرفضا: اگر یک فضای اقلیدسی درون یک فضای اقلیدسی باشد یا به بیانی دیگر زیرمجموعه‌ی آن باشد، فضای نخست را زیرفضای فضای دوم می‌نامند. در همین بخش ثابت می‌شود که تعداد ابعاد زیرفضا از تعداد ابعاد خود فضا کمتر بوده و یا برابر آن می‌باشد.

فضای مرجع (R_n): فضای اقلیدسی چندبعدی است که دربرگیرنده‌ی همه‌ی فضاها و اشکال مورد بحث باشد. بر اساس اصل چهارم اصول موضوعه‌ی این فصل، بُعد (تعداد ابعاد) فضای مرجع از بعد تمامی اشکال و فضاهای مورد بحث بیش‌تر است. در تناظر با فضاهای دکارتی آن را با IR^n نیز نشان می دهیم.

شکل (F_n): به ازای مقادیر طبیعی n ، شکل n بعدی مجموعه‌ی نقاطی از یک فضای اقلیدسی n بعدی است که در هیچ فضای اقلیدسی n-۱ بعدی نمی‌گنجند. یک شکل چندبعدی می‌تواند بی‌کران هم باشد یعنی از یک یا چند سو تا بی‌نهایت گسترده شده باشد. پس فضای اقلیدسی خود نوعی شکل چندبعدی است. بعد یا تعداد ابعاد یک شکل بنا بر قرارداد برابر با بعد فضای حامل آن شکل بوده برای شکل n بعدی همان n است.

شکل بسته: شکل بسته‌ی n بعدی حالت ویژه‌ای از یک شکل n بعدی است که مجموعه‌ی نقاط تشکیل دهنده‌ی آن، فضای حامل آن شکل را به سه ناحیه افراز می‌کنند: درون، برون و روی شکل. این سه ناحیه از مفاهیم نخستین هستند، جدا از هم بوده و نیز اجتماع‌شان برابر فضای حامل شکل نامبرده است.

حجم (V_n): حجم n بعدی (درجه‌ی n) یک شکل n بعدی بسته عددی است مثبت که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ) این عدد با جا به جا شدن یک شکل تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر حجم‌های دو شکل برابر با هم برابرند.

(ب) اگر یک شکل n بعدی بسته به طور کامل درون یک شکل n بعدی بسته‌ی دیگر باشد، حجم درجه‌ی n شکل نخست کمتر از حجم درجه‌ی n دومین شکل می‌باشد.

(پ) حجم درجه‌ی n اجتماع دو شکل n بعدی بسته که اشتراک آن دو یک شکل n بعدی بسته نیست، برابر با مجموع حجم‌های درجه‌ی n هر یک از آن دو شکل می‌باشد.

(ت) اگر $n>k$ ، آنگاه حجم درجه‌ی n یک شکل k بعدی برابر با صفر است.

(ث) حجم درجه‌ی n یک منشور n بعدی[1] برابر با حاصل‌ضرب ارتفاع در حجم درجه‌ی n−۱ قاعده‌ی آن می‌باشد.

حجم درجه‌ی یک از جنس درازا، حجم درجه‌ی دو از جنس مساحت و حجم درجه‌ی سه از جنس حجم معمولی است. یکای اندازه گیری حجم درجه‌ی n توان n ام یکای طول می‌باشد. بنا بر قرارداد، هر جا حجم یک شکل n بعدی بدون یاد کردن درجه‌ی آن گفته شد، منظور حجم درجه‌ی n آن شکل n بعدی است.

راستا: در فضای مرجع n بعدی به همه‌ی فضاهای k بعدی موازی با فضای k بعدی مفروض S_k راستای فضای S_k گفته می‌شود.

هم‌بعد: در فضای مرجع n بعدی به دو فضای اقلیدسی مانند S_k و S'_k که هر دو از نظر تعداد بعد برابر باشند (هر دو k بعدی باشند)، دو فضای هم‌بعد گویند.

حالات نسبی دو فضای چندبعدی

اینک حالات نسبی دو فضای اقلیدسی m و n بعدی S_m و S_n را تعریف می‌کنیم ($n\geq m\geq 1$). با مقداردهی به m و n ثابت می‌شود که این تعاریف در فضای مرجع سه‌بعدی هم‌ارز تعاریف اصلی توازی، تنافر، انطباق، تقاطع و تعامد بوده و در ابعاد بالاتر تعمیمی از این مفاهیم اند:

توازی: این دو فضا موازی هستند اگر و تنها اگر S_m بر S_n منطبق باشد، یا اینکه S_m و S_n جدا از هم باشند و نیز در یک فضای n+۱ بعدی بگنجند[1].

[1] تعریف آن را در بخش سوم ببینید.

$$S_m \,|\!|\, S_n \Leftrightarrow (S_m \subset S_n) \vee ((\, S_{n+1} : S_m, S_n \subset S_{n+1}) \wedge (S_m \cap S_n = \varnothing))$$

تقاطع: این دو فضا متقاطع می‌باشند اگر و تنها اگر جدا از هم نباشند. در این فصل ثابت خواهیم کرد که فصل مشترک دو فضای متقاطع m بعدی و n بعدی حتماً یک فضای اقلیدسی m بعدی، m−۱ بعدی ،...، یک خط راست و یا یک نقطه است و اجتماع این دو فضا هم در این حالات از یک فضای اقلیدسی n بعدی گرفته تا یک فضای اقلیدسی m+n بعدی می‌باشد:

$$S_m \cap S_n \neq \varnothing$$

تنافر: این دو فضا متنافر هستند اگر و تنها اگر جدا از هم باشند و نیز در یک فضای n+۱ بعدی نگنجند (فضای بیش از n+۱ بعدی را مشخص کنند). بنابراین شرط لازم و کافی متنافر بودن موازی یا متقاطع نبودن است. در واقع در این حالت دو فضای نام برده می‌توانند از یک فضای n+۲ بعدی گرفته تا یک فضای n+m+۱ بعدی را معیّن کنند:

$$(\, S_{n+1} : S_m, S_n \not\subset S_{n+1}) \wedge S_m \cap S_n = \varnothing$$

انطباق: S_m بر S_n منطبق است اگر و تنها اگر هر نقطه داخل S_m در S_n نیز قرار گیرد و به عبارت دیگر S_m زیرمجموعه یا زیرفضای S_n باشد. چنانکه از تعریف‌ها بر می‌آید انطباق حالت خاصی از توازی و تقاطع و نیز تنها حالت اشتراک توازی و تقاطع است.

$$S_m \subset S_n \Leftrightarrow (\, A \in S_m : A \in S_n)$$

تعامد: این دو فضا بر هم عمودند اگر و تنها اگر وجود داشته باشد خطی در S_m که بر n S عمود باشد. نیز برای تعریف عمود بودن یک خط بر یک فضای n بعدی می‌گوییم که خط δ موازی با امتداد معیّن Δ بر فضای n بعدی S_n عمود است اگر و تنها اگر که بر تک تک خطوط یک گروه‌خط n تایی[2] از آن فضا عمود باشد.

---

[1] در قضایای همین بخش ثابت می شود که این فضا یگانه است.

[2] تعریف گروه خط n تایی در قضایای همین بخش آمده است.

اصول موضوع هندسه‌ی ابعاد

از زمان اقلیدس تا کنون ریاضی‌دانان بنای هندسه‌ی اقلیدسی را بر ده‌ها اصل موضوع و متعارف استوار کرده‌اند. این اصول گزاره‌هایی بدیهی‌اند که درستی آنها را بدون اثبات می‌پذیریم و برای اثبات قضایای بعدی به کارشان می‌گیریم. در فضاهای چندبعدی برای به دست آوردن گزاره‌های درست نمی توانیم تنها از اصول شناخته‌شده‌ی هندسه‌ی اقلیدسی استفاده کنیم. برای نمونه هندسه‌ی فضایی تنها بر اصول هندسه‌ی مسطحه بنا نشده است و تعاریف و اصولی ویژه‌ی فضای سه‌بعدی دارد. اینک اصول موضوعی را بیان می‌کنیم که برای بدون اثبات پذیرفته شده‌اند و بیشتر تعمیمی هستند از اصول هندسه‌ی اقلیدسی در ابعاد بالاتر:

۱- هر n+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای n-۱ بعدی یک و تنها یک فضای n بعدی را مشخص می‌کنند.

۲- بر هر شکل n بعدی دست‌کم n+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای n-۱ بعدی وجود دارد.

۳- اگر n+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای n بعدی، از یک فضای اقلیدسی n بعدی در یک فضای اقلیدسی m بعدی واقع باشد ($n \geq m$)، آنگاه تمامی نقاط فضای اول در فضای دوم قرار دارد.

٤- اگر جسمی در یک فضای n بعدی نگنجد، در یک فضای n-۱ بعدی نیز نمی‌گنجد.

٥- اصل کاوالیری : اگر دو شکل بسته‌ی n بعدی A و B و فضای n-۱ بعدی S_{n-1} در یک فضای n بعدی باشند و هر فضای n-۱ بعدی موازی با S_{n-1} یا هر دو شکل A و B را قطع کند و یا هیچ کدام را قطع نکند، و اگر هر دو را قطع کرد حجم‌های درجه‌ی n-۱ مقطع‌های به دست آمده برابر باشند، آنگاه حجم‌های درجه‌ی n اشکال A و B با هم برابرند.

٦- در فضای مرجع n+۱ بعدی از هر نقطه بیرون یک فضای n بعدی یک و تنها یک خط عمود بر آن فضا می‌گذرد.

۷- فصل مشترک دو فضای اقلیدسی متقاطع، یک فضای اقلیدسی است.

۸- اگر فضای حاصل از فصل مشترک دو فضای اقلیدسی m بعدی و n بعدی متقاطع، i بعدی و شکل حاصل از اجتماع آن دو فضا u بعدی باشد، آنگاه: $m+n = u+i$

۹- فضایی با ابعاد اعشاری یا منفی وجود ندارد.

۱۰–از هرنقطه خارج هر فضای n بعدی، دست‌کم یک فضای n بعدی موازی با آن می‌گذرد.

۱۱– اگر خطی بر یک فضای n بعدی عمود باشد، بر هر خط درون آن فضا عمود است.

چنانکه دیده می‌شود پذیرفتن سه اصل نخست اجتناب ناپذیر است، چرا که نظایر این اصول در هندسه‌ی اقلیدسی برای ابعاد یک، دو و سه بدون اثبات پذیرفته شده‌اند. بنابراین ما برای بحث کردن در ابعاد بالاتر درستی آنها را برای همه‌ی ابعاد می‌پذیریم.

اصل چهارم به نظر بدیهی‌تر از آن است که بخواهیم به آن شک کنیم،پس تنها به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که در واقع اصل چهارم می‌گوید که *بدون در نظر گرفتن محدودیت‌های فضای مرجع، برای هر فضای n بعدی یک فضای n+1 بعدی وجود دارد که آن فضای n بعدی را در بر می‌گیرد.* می‌توان این گزاره را از بدیهیات فرض کرده و اصل چهارم را از آن نتیجه گرفت: اگر جسم در فضای n بعدی نگنجد، در فضای n–۱ بعدی هم نمی‌گنجد، زیرا اگر در فضای n–۱ بعدی جای گیرد، وجود دارد فضای n بعدی که آن فضای n–۱ بعدی و نیز آن شکل را در بر می‌گیرد و این خلاف فرض است.

اصل پنجم تعمیمی است از اصل کاوالیری که با انتگرال ثابت می‌شود. از آنجا که در هندسه‌ی اقلیدسی بدون به‌کارگیری این اصل می‌توان تمامی قضایای مربوط را ثابت کرد، خود اصل کاوالیری از اصول هندسه‌ی اقلیدسی به شمار نمی‌آید، ولی در این کتاب، تعمیم یافته‌ی اصل کاوالیری را از اصول هندسه‌ی ابعاد در نظر می‌گیریم.

اصل ششم همانند قضیه‌ی تعامد اقلیدس است که از اصل توازی اقلیدس (اصل پنجم از اصول نخستین هندسه‌ی اقلیدسی) نتیجه می‌شود. از آنجایی که یکتایی عمود–متقاطع وارد از یک نقطه بر یک فضا از قضیه‌ی تعامد نتیجه نمی‌شود، تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی تعامد را در قالب چنین اصلی بدون اثبات پذیرفته‌ایم.

اصل هفتم با توجه به این که فضای اقلیدسی فضایی راست (بدون خمیدگی) و بی‌کران است، بدیهی به نظر می‌رسد. البته این که در یک صفحه اشتراک دو خط ناموازی یک نقطه است و نیز در یک فضای سه‌بعدی اشتراک دو صفحه‌ی ناموازی یک خط راست می‌باشد، در هندسه‌ی اقلیدسی به شکل قضیه ثابت می‌شود، ولی خود این اثبات‌ها نیاز به یک فضای مرجع دارد که تعداد ابعاد مورد بحث را محدود کند. برای نمونه در یک فضای چهاربعدی دو صفحه می‌توانند یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند و این گزاره در هندسه‌ی فضایی اقلیدسی مردود است. بنابراین

با نامعلوم بودن تعداد ابعاد فضاهای مورد بررسی و نیز در نظر نگرفتن یک فضای مرجع محدودکننده اثبات این گزاره جنبه‌ی پیچیده‌تری را به خود می‌گیرد، تا جایی که ما را ناچار به پذیرفتن آن به عنوان یک اصل می‌کند.

درباره‌ی اصل هشتم باید گفت که اصلاً بدیهی نیست ولی ناچاریم که آن را به عنوان پیش فرض بپذیریم. گفتن این نکته ضروری است که فصل مشترک دو فضای اقلیدسی متقاطع n و m بعدی ($m \geq n$) بر خلاف انتظار هر فضای اقلیدسی از نقطه و خط گرفته تا یک فضای m بعدی می‌تواند باشد. مثلاً دو صفحه در یک فضای چهاربعدی می‌توانند یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، ولی برای ما تصور این موضوع به دلیل محدودیت‌های جهانمان ناممکن است. فرمولی که در اصل هشتم آورده شده است، هم‌ریخت با این برابری در نظریه‌ی مجموعه‌ها است:

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

نکته‌ی مهمی که باید درباره‌ی اصل نهم به یاد داشته باشید این است که ما فعلاً وجود ابعاد منفی و اعشاری را در اثبات قضایا رد می‌کنیم، ولی در پایان کتاب بخش‌هایی را به تعمیم دادن فضاها به فضاهایی با تعداد ابعاد منفی و اعشاری اختصاص می‌دهیم.

وضع اصل دهم در نگاه نخست چندان ضروری به نظر نمی‌رسد، ولی با تعمقی بیشتر می‌توان دریافت که چنین نیست، چرا که بر خلاف هندسه‌ی مسطحه، وجود فضای موازی را از یکتایی عمود نمی‌توان به دست آورد.

اصل موضوعه‌ی یازدهم نیز می‌گوید اگر تعریف تعامد برای یک خط و یک فضای اقلیدسی صدق کند، این تعریف برای آن خط و هر خط دیگر از آن فضا برقرار است. در تعمیمی از این اصل می‌توان نشان داد که خط یادشده نه تنها بر هر خط آن فضا، بلکه بر هر زیرفضای آن نیز عمود است.

قضایای اساسی هندسه‌ی ابعاد

اکنون می‌توانیم با به کار گیری تعاریف و اصول گفته‌شده قضایای زیر را ثابت کنیم. بیشتر این قضایا تعمیم‌یافته‌ی قضایایی هستند که در گذشته در مباحث هندسه‌ی مسطحه و فضایی به آنها برخورده‌ایم:

قضیه: فضای حامل هر شکل چندبعدی یگانه است.

برهان: شکل n بعدی یاد شده را F_n می‌نامیم. بر اساس اصل دوم بر هر شکل n بعدی، n+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای n−۱ بعدی وجود دارد که بر اساس اصل نخست دقیقاً یک فضای n بعدی چون S_n از آنها می‌گذرد. روشن است که هر فضای n بعدی چون S'_n که از F_n می‌گذرد، باید از n+۱ نقطه‌ی مذکور نیز بگذرد. از سوی دیگر می‌دانیم که تنها یک فضای n بعدی شامل آن n+۱ نقطه وجود دارد، پس S'_n باید همان فضای یگانه‌ی S_n باشد و در نتیجه برای هر شکل چون F_n یک و تنها یک فضای حامل وجود دارد.

قضیه: اگر یک فضای اقلیدسی شامل یک شکل n بعدی باشد، فضای حامل آن شکل را نیز در بر می‌گیرد.

برهان: در آغاز فرض می‌کنیم که فضای S_m شامل شکل مذکور یعنی F_n باشد، بنابراین S_m در بر گیرنده‌ی آن n+۱ نقطه مذکور در قضیه‌ی پیشین بوده و بر اساس اصل سوم تنها فضای n بعدی شامل F_n یعنی S_n را نیز در بر می‌گیرد.

قضیه: اگر یک فضای n بعدی چون S_n ، یک فضای n بعدی مانند S'_n را در بر گیرد، آن دو فضا بر هم منطبق‌اند.

برهان: S'_n شکلی n بعدی است که S_n و S'_n هر دو شامل آن‌اند، بنابراین S_n و S'_n همان فضای حامل یگانه‌ی S'_n هستند و این به معنای این است که این دو فضا بر هم منطبق اند.

قضیه: اگر شکل n بعدی F_n شکل m بعدی F_m را در بر گیرد، فضای حامل F_n هم فضای حامل F_n را در برمی گیرد.

برهان: S_n را فضای حامل F_n و S_m را فضای حامل F_m در نظر می‌گیریم. اکنون S_n شامل F_n و F_n شامل F_m است، بنابراین S_n شکل F_m را شامل شده و بنابر قضیه‌ی قبل فضای حامل آن (S_m) را هم در بر می‌گیرد.

قضیه: فضای n بعدی S_n و نقطه‌ی A خارج از آن دقیقاً یک فضای n+۱ بعدی را مشخص می‌کنند.

برهان: بنا بر اصل دوم بر S_n ، n+۱ نقطه قرار دارد که در یک فضای n−۱ بعدی نمی‌گنجند. این n+۱ نقطه و نقطه‌ی A روی هم n+۲ نقطه هستند که اگر در یک فضای n بعدی بگنجند، این فضا همان فضای حامل آن n+۱ نقطه یعنی همان S_n می‌باشد و A را در بر می‌گیرد و این خلاف فرض است. پس این n+۲ نقطه غیر واقع بر یک فضای n بعدی هستند و بنا بر اصل نخست یک و تنها یک فضای n+۱ بعدی چون S_{n+1} را مشخص می‌کنند. حال S_{n+1} ، n+۱ نقطه از S_n را در بر می‌گیرد که در یک فضای n−۱ بعدی جای نمی‌گیرند، پس بر اساس اصل سوم تمام S_n را در بر می‌گیرد. از طرفی S_{n+1} شامل A نیز می‌باشد. بنابراین A و S_n در هیچ فضای n بعدی جای نمی‌گیرند، در حالی که یک فضای n+۱ بعدی از آنها می‌گذرد، پس فضای n+۱ بعدی یگانه‌ای را مشخص می‌کنند.

قضیه: از n+۱ نقطه یک فضای n بعدی می‌گذرد.

برهان: اگر این n+۱ نقطه در یک فضای n بعدی نگنجند آنگاه بنا بر اصل چهارم در یک فضای n−۱ بعدی نیز نمی‌گنجند و بر اساس اصل نخست باید در یک فضای n بعدی جای بگیرند و این خلاف فرض است بنابراین n+۱ نقطه در یک فضای n بعدی می‌گنجند و از آنها یک فضای n بعدی می‌گذرد.

قضیه: n خط همرس غیر واقع بر فضای n−۱ بعدی دقیقاً یک فضای n بعدی را مشخص می‌کنند[1].(n≥۲)

برهان: در آغاز ثابت می‌کنیم که n خط همرس در یک فضای n بعدی می‌گنجند:

n خط که در نقطه‌ی O همرس‌اند را در نظر می‌گیریم. بر هر یک از این خطوط نقطه‌ای به جز O را به نام A_i انتخاب می‌کنیم. n نقطه‌ی انتخاب‌شده و نقطه‌ی O تشکیل n+۱ نقطه را می‌دهند که بنا بر قضیه‌ی قبل در یک فضای n بعدی می‌گنجند. از هر یک از این n خط دو نقطه‌ی متمایز در این فضا قرار دارد که یکی از آنها نقطه‌ی O و دیگری A_i می‌باشد، پس بنا بر

[1] به این n خط همرس یک گروه خط n تایی گویند.

اصل سوم هر یک از این خطوط به طور کامل در این فضای n بعدی قرار دارند و در آن می‌گنجند.

بنابراین ثابت شد که n خط همرس حتماً در یک فضای n بعدی می‌گنجند، پس اگر در یک فضای n-۱ بعدی نگنجد یک شکل n بعدی را تشکیل می‌دهند و یک و تنها یک فضای n بعدی را مشخص می‌نمایند[1].

قضیه: فضای اقلیدسی S_m بر S_n منطبق است اگر و تنها اگر اجتماعشان شکلی n بعدی باشد. $(n \geq m)$

(اگر $n \geq m$ ، آنگاه شرط لازم و کافی برای انطباق S_m بر S_n این است که S_m و S_n یک و تنها یک فضای n بعدی را معیّن کنند.)

برهان: برای اثبات قضیه‌ی دو شرطی شروط لازم و کافی را جداگانه بررسی می‌کنیم:

شرط لازم: اگر S_m بر S_n منطبق باشد، زیرمجموعه‌ی آن نیز هست. پس اجتماع S_m و S_n برابر با S_n می‌باشد که شکل n بعدی است و فضای حامل آن نیز n بعدی خواهد بود.

شرط کافی: فضای حامل اجتماع S_m و S_n دربرگیرنده‌ی هر دو فضای S_m و S_n است و چون این فضا n بعدی می‌باشد بر اساس قضایای قبل همان S_n بوده و درنتیجه S_n شامل S_m می‌باشد. اکنون از تعریف انطباق نتیجه می‌شود که S_m بر S_n منطبق است.

قضیه: اگر یک شکل m بعدی درون فضای اقلیدسی n بعدی باشد، آنگاه $m \leq n$.

برهان: شکل m بعدی مذکور را F_m می‌نامیم. بنا بر تعریف، این شکل در یک فضای m-۱ بعدی نمی‌گنجد و بر اساس اصل چهارم در فضاهایی m-۲ بعدی، m-۳ بعدی و ... نیز جای نمی‌گیرد. پس شکل F_m در هیچ یک از فضاهای کمتر از m بعد نمی‌گنجد، بنابراین تعداد ابعاد فضای n بعدی شامل F_m نمی‌تواند کمتر از m باشد و به برهان خلف داریم: $m \leq n$.

---

[1] از هر n+۱ نقطه و نیز از هر n خط همرس حتما یک فضای n بعدی می گذرد. ولی اگر این n+۱ نقطه و این n خط همرس در یک فضای n-۱ بعدی نگنجند، آنگاه فضای n بعدی گذرنده از آنها یگانه خواهد بود.

قضیه: اگر شکل حاصل از اجتماع دو فضای اقلیدسی متقاطع m بعدی و n بعدی u بعدی باشد، آنگاه: ($n+m\geq u\geq n$)

برهان: می‌دانیم که اشتراک دو فضای اقلیدسی یک فضای اقلیدسی است که در هر دوی آنها قرار دارد، یعنی زیرفضای آن دو فضا است. از قضیه‌ی قبل نتیجه می‌شود که تعداد ابعاد هر فضای اقلیدسی از تعداد ابعاد زیرفضای آن بیشتر است. بنابراین اگر اجتماع دو فضای نام‌برده، i بعدی باشد $m\geq i$ خواهد بود. از سوی دیگر بنا بر اصل هشتم داریم:

$$m+n = u+i \Rightarrow u = m+n-i \Rightarrow n\geq u\geq n+m$$

قضیه: فضای $n+1$ بعدی در بر گیرنده‌ی دو فضای موازی و جدا از هم S_m و S_n یگانه است. ($n\geq m$)

برهان: برای اثبات برهان خلف را به کار می‌گیریم:

فرض می‌کنیم که این دو فضا در یک فضای n بعدی مانند $S'n$ بگنجند. اکنون $S'n$ فضای n بعدی است که شامل فضای n بعدی S_n می‌باشد، پس $S'n$ بر S_n منطبق بوده و زیرفضای آن است. از سوی دیگر می‌دانیم که S_m زیرفضای $S'n$ ، و $S'n$ زیرفضای S_n می‌باشد، بنابراین S_m زیرفضای S_n هم هست یعنی اشتراک این دو فضا برابر با S_m می‌باشد و این خلاف فرض است چرا که اشتراک دو فضای نامبرده برابر با تهی است. پس این دو فضا در یک فضای n بعدی جای نمی‌گیرند در حالی که در فضای $n+1$ بعدی می‌گنجند. پس اجتماع این دو فضا $n+1$ بعدی بوده و آن دو فضا یک فضای $n+1$ بعدی را معیّن می‌کند که این فضا بر اساس نخستین قضیه‌ی این بخش یگانه است.

قضیه: اگر فضای اقلیدسی S_n با فضای اقلیدسی S_m موازی باشد، با S_k زیرفضای S_m نیز موازی می‌باشد. ($n\geq m$)

برهان: بر اساس تعریف توازی S_m و S_n بر یکی از دو حالت زیرند:

(الف) S_m بر S_n منطبق است یعنی زیرمجموعه‌ی آن می‌باشد و از سویی S_k زیرمجموعه‌ی S_m است و بنابر ویژگی تراگذری رابطه‌ی زیر مجموعه بودن S_k زیر مجموعه‌ی S_n است و بر آن منطبق می‌باشد، یعنی S_k با S_n موازی است.

(ب) S_m و S_n جدا از هم بوده و یک و تنها یک فضای $n+1$ بعدی چون S_{n+1} را معیّن می‌کنند. اکنون فضای حامل اجتماع S_k و S_n را یک فضای اقلیدسی x بعدی در نظر می‌گیریم. فضای مذکور شامل S_n است پس بنا بر قضیه‌ی پیشین $x \geq n$ می‌باشد. نیز شکل حاصل از اجتماع S_k و S_n زیر مجموعه‌ی شکل حاصل از اجتماع S_m و S_n می‌باشد، پس در فضای S_{n+1} می‌گنجد و بر اساس قضیه‌ی قبل باید رابطه‌ی $x \geq n+1$ نیز برقرار باشد. از دو نامساوی به دست آمده تنها پاسخ‌های ممکن برای x ، اعداد n و $n+1$ هستند. اگر $x = n$ ، فضای حامل اجتماع دو فضای S_k و S_n، n بعدی بوده و S_k بر S_n منطبق است، در حالی که S_k و S_n جدا از هم‌اند، پس S_k و S_n نیز جدا از هم بوده و نمی‌توانند منطبق باشند. یعنی S_k و S_n دو فضای جدا از هم‌اند که فضای حامل‌شان $n+1$ بعدی است و موازی‌اند.

قضیه: اگر یک فضای اقلیدسی بر فضای اقلیدسی دیگر عمود باشد، فضای دوم نیز بر فضای نخست عمود است.

برهان: تعریف تعامد یک تعریف متقارن است که آن را می‌توان چنین بیان کرد که یک فضای اقلیدسی بر فضای دیگر عمود است اگر و تنها اگر خطی در فضای کم‌بعدتر وجود داشته باشد که بر فضای دیگر عمود باشد. روشن است که این تعریف نسبت به دو فضای نامبرده متقارن است و تعامد ویژگی تقارنی دارد.

قضیه: خطی عمود بر خط دیگر بر خط موازی آن هم عمود است.

برهان: می‌دانیم که دو خط عمود بر هم در یک فضای سه‌بعدی ($m+n+1=3$) می‌گنجند. بنابراین می‌توانیم از تعریف هندسه‌ی اقلیدسی برای تعامد در فضای سه بعدی استفاده کنیم. بنابراین تعریف یک خط δ بر خط δ' عمود است اگر و تنها اگر خطی گذرنده از δ' و موازی با δ بر δ' عمود باشد.

اینک فرض می‌کنیم که خط δ بر خط δ' عمود بوده و خط δ'' موازی با δ' باشد. بنا بر ویژگی جابه‌جایی تعامد δ' بر δ عمود است. اکنون بنا بر تعریف گفته شده خط Δ که از نقطه‌ی

A روی δ می‌گذرد و با δ' موازی است، بر δ عمود می‌باشد. از سوی دیگر سه خط موازی همواره در یک فضای سه‌بعدی می‌گنجند و بر اساس هندسه‌ی اقلیدسی رابطه‌ی توازی بین خطوط راست ویژگی تراگذری دارد. اینک Δ با δ' موازی است، پس با موازی آن δ'' هم موازی می‌باشد. یعنی خط Δ گذرنده از δ وجود دارد که بر δ عمود بوده و با δ'' موازی است. درنتیجه δ و δ'' بر هم عمودند.

قضیه: اگر خطی بر یک فضای اقلیدسی عمود باشد، هر خط موازی با آن خط نیز بر آن فضا عمود است.

برهان: اگر خط δ موازی δ' بر فضای S_n عمود باشد، بنا بر تعریف گروه‌خط n تایی در فضای S n وجود دارد چنان که δ بر تمامی خطوط آن عمود است، پس δ' موازی با δ نیز باید بر تک تک آن خطوط و درنتیجه بر S_n عمود باشد. چرا که می‌دانیم که هر خط عمود بر یک خط بر خط موازی آن نیز عمود است.

قضیه: اگر خط δ با فضای اقلیدسی S_n موازی باشد، به ازای هر نقطه‌ی A در فضای S_n خطی مانند δ' در گذرنده از A وجود دارد که با δ موازی باشد.) ($n\geq 1$)

برهان: نخست فرض می‌کنیم که δ بر S_n منطبق باشد، در این حالت اگر خط δ از نقطه‌ی A بگذرد، این خط خود پاسخ قضیه است، چرا که از A گذشته، با δ موازی بوده و در فضای S_n نیز قرار دارد. حال اگر δ از A نگذرد، خط δ' را موازی با δ و گذرنده از A در نظر می‌گیریم. اکنون δ و δ' دو خط موازی هستند که صفحه‌ای چون P از آنها می‌گذرد. سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست از صفحه‌ی مذکور (A و دو نقطه‌ی متمایز از خط δ) در فضای S_n قرار دارند، پس فضای حامل این سه نقطه یعنی صفحه‌ی P زیرفضای S_n است و در نتیجه خط δ' موازی با δ و گذرنده از A به فضای S_n تعلق دارد و قضیه برقرار است. اینک حالتی را فرض می‌کنیم که δ و S n موازی و نامنطبق باشند.

در این حال چون از دو فضای موازی δ و S_n یک فضای n+۱ بعدی می‌گذرد، فضای مرجع را n+۱ بعدی می‌گیریم. اکنون خط δ و نقطه‌ی A را در S_n در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی A نمی‌تواند درون خط δ واقع شده باشد، زیرا در غیر این صورت هم در δ واقع می‌شود و هم در S_n و این ناممکن است چون اشتراک δ و S_n تهی است. پس A بیرون از خط δ است و از A

و δ یک صفحه چون P می‌گذرد. سه نقطه از P (A و دو نقطه‌ی متمایز از خط δ) که بر یک خط راست واقع نیستند، بر فضای مرجع n+۱ بعدی قرار دارند، پس تمام صفحه‌ی P در آن فضا قرار دارد. از سویی می‌دانیم که اشتراک صفحه‌ی P با S_n زیرفضای صفحه‌ی P است و تعداد ابعادش از تعداد ابعاد P بیشتر نیست، پس فصل مشترک یک نقطه، خط یا صفحه است.

صفحه‌ی P فضای S_n را در A قطع می‌کند، ولی اشتراک آن با S_n تنها در یک نقطه نیست، زیرا در این صورت بنا بر فرمول $i+u = n+m$ ، S_n و صفحه‌ی مذکور باید یک و تنها یک فضای n+۲ بعدی را معیّن کنند و نباید در یک فضای اقلیدسی n+۱ بعدی بگنجند، در حالی که هر دوی آنها در یک فضای مرجع n+۱ بعدی قرار دارند.

اشتراک صفحه‌ی P با S_n در یک صفحه هم نیست، زیرا در این حال صفحه‌ی فصل مشترک همان P می‌باشد و P باید زیرفضای S_n باشد و درنتیجه نقطه‌ی A نیز باید در فضای S_n قرار گیرد و همان گونه که پیش‌تر گفته شد این ناممکن است.

بنابراین اشتراک یک فضای صفحه‌ی P با S_n یک خط راست است که آن را δ' می‌نامیم. δ' با δ اشتراکی ندارد، زیرا در غیر این صورت نقطه‌ی اشتراکی آن دو علاوه بر δ در δ' نیز هست، پس در S_n می‌باشد و این به دلیل جدا از هم بودن δ و S_n ممکن نیست. اکنون δ و δ' دو خط راست جدا از هم‌اند که در یک صفحه قرار دارند پس با هم موازی‌اند. بدین ترتیب برای هر خط چون δ موازی با S_n خطی مانند δ' در S_n وجود دارد که با خط δ موازی باشد.

قضیه: اگر فضای اقلیدسی S_n با فضای اقلیدسی S_m موازی باشد، با فضای اقلیدسی S_k که S_m زیرفضای آن است نیز موازی می‌باشد. ($m \geq n$)

برهان: بر اساس تعریف توازی S_m و S_n بر یکی از دو حالت زیرند که در هر مورد توازی S_k و S_n را ثابت می‌کنیم:

الف) S_n بر S_m منطبق است. در این حالت S_n زیرفضای S_m و S_n زیرفضای S_k بوده و بر اساس ویژگی تراگذری رابطه‌ی توازی S_n زیرفضای S_k و موازی با آن خواهد بود.

(ب) S_n بر S_m منطبق نیست. در این حالت توازی این دو فضا ایجاب می‌کند که این دو جدا از هم بوده و فضای حامل‌شان هم یک فضای m+۱ بعدی مانند S_{m+1} باشد. از سوی دیگر

فضای حامل S_m و S_k هم به علت تعلق S_m به S_k همان فضای k بعدی S_k خواهد بود. اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(ب-۱) S_k و S_n جدا از هم هستند. اکنون موقعیت نسبی فضای حامل S_n و S_m (یعنی S_{m+1}) را با فضای S_k می‌سنجیم. این دو فضا هر دو شامل S_m هستند، یعنی یک فضای m+۱ بعدی و یک فضای k بعدی در دست است که در یک فضای m بعدی با هم مشترکند، در نتیجه بر اساس اصل موضوعه‌ی هشتم دو فضای S_{m+1} و S_k در یک فضای k+۱ بعدی می‌گنجند (m+۱+k-m = k+۱). این بدان معنا است که هر سه فضای مذکور و در نتیجه‌ی آن دو فضای S n و S_k در فضایی k+۱ بعدی جای می‌گیرند و این امر با توجه به جدا از هم بودن S_n و S_k برای اثبات توازی این دو فضا کافی است.

(ب-۲) S_k و S_n جدا از هم نیستند، یعنی دست کم در یک نقطه مانند A اشتراک دارند. اکنون نقطه‌ی دلخواه X را در S_n در نظر می‌گیریم. خط حامل AX زیرفضای S_n است و S_n نیز با S m موازی می‌باشد، پس AX با S_m موازی است (m≥n) و می‌توان در S_m خطی چون δ یافت که با AX موازی باشد. از سوی دیگر δ متعلق به S_m و S_k و در نتیجه موازی با S_k است، پس می‌توان از نقطه‌ی A واقع بر S_k در خود S_k خطی مانند δ′ موازی با δ رسم کرد. اکنون δ′ و AX هر دو با δ موازی هستند، پس بر اساس اصل توازی اقلیدس این دو خط بر هم منطبق بوده و به بیان دیگر نقطه‌ی X روی خط δ′ و در نتیجه متعلق به فضای S_k است. بدین ترتیب هر نقطه‌ی X از S_n به S_k هم تعلق دارد و S_n در این حالت زیرفضای S_k و موازی با آن می‌باشد.

قضیه: اگر فضای اقلیدسی S_m بر فضای اقلیدسی S_n عمود باشد، بر هر فضای اقلیدسی k بعدی موازی S_n عمود خواهد بود، به شرطی که k بین m و n باشد و نیز Min(m,n)≥۱ .

(فضای اقلیدسی عمود بر فضایی اقلیدسی موازی با فضای اقلیدسی سوم، بر فضای سوم عمود است اگر تعداد ابعاد فضای سوم بین تعداد ابعاد دو فضای دیگر باشد.)

برهان: فضای k بعدی S_k را موازی با S_n در نظر می‌گیریم. اکنون قضیه را برای دو حالت زیر اثبات می‌نماییم:

(الف) $m\geq k\geq n\geq 1$: بنا بر تعریف تعامد خط δ در S_n وجود دارد که بر S_m و درنتیجه تمامی خطوط آن عمود باشد. از سوی دیگر S_n با S_k موازی است و چون k از n بزرگ‌تر یا مساوی است، خط δ نیز به عنوان زیرفضای S_n با S_k موازی خواهد بود. در نتیجه بر اساس قضیه‌ی قبل چون $(k\geq n\geq 1)$ است، در فضای S_k خطی مانند δ' گذرنده از نقطه‌ی دلخواه A در این فضا و موازی با خط δ وجود دارد و می‌دانیم که این خط به علت توازی‌اش با δ بر S_m عمود است. یعنی S_k شامل خط δ' است که بر S_m عمود می‌باشد، پس S_k و S_m بر هم عمودند.

(ب) $n\geq k\geq m\geq 1$: خط δ در S_m وجود دارد که بر S_n و درنتیجه همه‌ی خطوط آن عمود باشد. اینک یک گروه‌خط k تایی را در S_k در نظر می‌گیریم. اکنون به علت توازی S_k با S_n ، تک تک خطوط این گروه خط به عنوان زیرفضاهای S_k با S_n موازی هستند $(n\geq k)$.

پس بنا بر قضیه‌ی قبل موازی با هر خط δ در این گروه‌خط یک خط مانند δ' در فضای S_n وجود دارد $(n\geq k\geq 1)$ و چون δ' در فضای S_n قرار دارد و بر خط δ عمود است، پس δ موازی آن نیز بر δ عمود می‌باشد و تک‌تک خطوط گروه‌خط مذکور بر یکی از خطوط S_m یعنی δ عمودند، بنابراین S_k و S_m بر هم عمود می‌باشند.

قضیه: در فضای مرجع $n+1$ بعدی IR^{n+1} دو خط عمود بر یک فضای n بعدی مانند S_n با هم موازی‌اند.

برهان: فضای مرجع $n+1$ بعدی IR^{n+1} را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دو خط δ و δ' در این فضای مرجع بر S_n عمود هستند. اکنون از نقطه‌ی A واقع بر IR^{n+1} و خارج از S_n دو خط δ و δ' را موازی با δ و δ' رسم می‌کنیم. اینک δ با δ موازی است و از آن دو یک صفحه می‌گذرد. سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست از این صفحه (نقطه‌ی A و دو نقطه‌ی متمایز از خط δ) در فضای مرجع IR^{n+1} قرار دارند، پس تمام آن صفحه و درنتیجه خط δ در فضای مرجع قرار دارند. به همین ترتیب ثابت می‌شود که δ' هم در فضای مرجع قرار دارد. حال اگر δ و δ' با هم موازی نباشند δ و δ' نیز با هم موازی نمی‌باشند بنابراین در یک فضای مرجع $n+1$ بعدی از یک نقطه خارج یک فضای n بعدی دو عمود بر آن فضا رسم شده است و این خلاف اصل ششم می‌باشد. پس δ و δ' با هم موازی‌اند.

قضیه: در فضای مرجع IR^{n+1} خطی مانند δ که از نقطه‌ی A خارج از یک فضای n بعدی بر آن فضا عمود رسم شود، فضای n بعدی مذکور را در یک و تنها یک نقطه قطع می‌کند.

برهان: فضای n بعدی مذکور را S_n می‌نامیم. از اصل ششم می‌دانیم که در فضای مرجع IR^{n+1} دقیقاً یک خط δ را می‌توان بر فضای اقلیدسی S_n عمود کرد. چون خط δ و فضای S_n در یک فضای n+1 بعدی می‌گنجند، پس یا موازی‌اند و یا متقاطع. اگر موازی باشند باید در فضای S_n خطی چون δ' موازی با خط δ وجود داشته باشد، از سویی چون δ بر S_n عمود است، بنابراین بر هر خط آن از جمله δ' عمود می‌باشد و این غیرممکن است، پس δ و S_n متقاطع می‌باشند. همچنین اگر این دو فضا یکدیگر را در بیش از یک نقطه قطع کنند، بنا بر اصل سوم خط δ زیرفضای S_n می‌شود و S_n باید از نقطه‌ی A هم بگذرد و این خلاف فرض است، پس با برهان خلف ثابت می‌شود که نقطه‌ی تقاطع خط δ و فضای اقلیدسی S_n منحصر به فرد است و آن دو یکدیگر را در یک و تنها یک نقطه قطع می‌کنند.

قضیه: در فضای مرجع n+1 بعدی از هر نقطه در یک فضای n بعدی یک و تنها یک خط عمود بر آن فضا می‌گذرد.

برهان: فضای n بعدی S_n و نقطه‌ی A درون آن را در نظر می‌گیریم. همان گونه که می‌دانیم در فضای مرجع IR^{n+1} خط δ عمود بر S_n وجود دارد. از نقطه‌ی A موازی با δ خط δ را رسم می‌کنیم. اینک δ نیز بر S_n عمود می‌باشد، پس از هر نقطه در یک فضا می‌توان خطی عمود بر آن فضا رسم کرد. اینک فرض کنیم که δ و δ' هر دو بر S_n عمود باشند و از A بگذرند، پس بنا بر قضیه‌ی قبل خطوط متقاطع δ و δ' با هم موازی هستند، بنابراین بر هم منطبق می‌باشند. یعنی در یک فضای مرجع n+1 بعدی از هر نقطه درون یک فضای n بعدی یک و تنها یک خط عمود بر آن فضا می‌گذرد.

قضیه: هر n خط همرس دو به دو عمود بر هم یک گروه‌خط n تایی را تشکیل می‌دهند.($n\geq 2$)

برهان: برای اثبات این قضیه از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم:

می‌دانیم که دو خط همرس عمود بر هم یک و تنها یک صفحه را مشخص می‌کنند و یک گروه‌خط دو تایی را می‌سازند، پس مقدمه‌ی استقرا برقرار است. اینک فرض می‌کنیم که هر k خط دو به دو عمود بر یکدیگر یک و تنها یک فضای اقلیدسی k بعدی مانند S_k را مشخص می‌نمایند و یک گروه‌خط k تایی را به وجود می‌آورند و ثابت می‌کنیم که هر $k+1$ خط دو به دو عمود بر هم نیز یک گروه‌خط k تایی را می‌سازند.

اکنون می‌گوییم که این $k+1$ خط دو به دو عمود بر هم تشکیل شده‌اند از k خط دو به دو عمود بر هم و یک خط δ که در نقطه‌ی همرسی بر آنها عمود است. اگر این $k+1$ خط در یک فضای k بعدی چون S'_k بگنجند، S'_k شامل گروه‌خط k تایی نخستین و درنتیجه شامل فضای حامل آن گروه‌خط یعنی فضای اقلیدسی S_k می‌باشد، پس دو فضای k بعدی S_k و S'_k بر هم منطبق‌اند. از سوی دیگر خط δ بر تمام خطوط فضای S_k یا همان S'_k عمود است، پس خط δ باید بر خودش هم عمود باشد و این ناممکن است. بنابراین خط δ و گروه‌خط k تایی که $k+1$ خط دو به دو عمود بر هم هستند در یک فضای k بعدی نمی‌گنجند، در حالی که پیش از این ثابت کرده بودیم که هر $k+1$ خط همرس حتماً در یک فضای $k+1$ بعدی می‌گنجند، بنابراین خطوط نام برده یک گروه‌خط $k+1$ تایی هستند و حکم استقرا بر قرار می‌باشد. پس با به‌کارگیری استقرا ثابت کردیم که این قضیه برای هر $n\geq 2$ برقرار است.

قضیه: دو فضای اقلیدسی موازی و جدا از هم m بعدی و n بعدی مانند S_m و S_n بر خطوط موازی که آنها را قطع کنند، پاره‌خط‌های برابر پدید می‌آورند[1]. $(m,n\geq 1)$

برهان: نقاط متمایز A و C را در فضای اقلیدسی S_m و B و D را در فضای اقلیدسی S_n در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که امتداد پاره‌خط‌های AB و CD با هم موازی‌اند. اکنون از این دو پاره‌خط موازی یک صفحه مانند P می‌گذرد. بنا بر اصل هفتم فصل مشترک صفحه‌ی P با S_m و S_n باید زیرفضای P باشد یعنی نقطه، خط راست و یا صفحه باشد. این فصل مشترک یک نقطه نیست زیرا صفحه‌ی P هر یک از این دو فضا را در دو نقطه‌ی متمایز A و C یا B و D قطع می‌کند. نیز اگر این فصل مشترک یک صفحه باشد، این صفحه در P قرار دارد و همان صفحه‌ی

[1] در حالتی که امتداد این خطوط موازی بر این دو فضا عمود باشد، طول این پاره خط های برابر را فاصله‌ی دو فضای موازی می‌گوییم.

P می‌باشد. یعنی صفحه‌ی P باید زیرفضای هر دو فضای S_n و S_m باشد و این ممکن نیست، زیرا S_n و S_m جدا از هم‌اند. بنابراین فصل مشترک صفحه‌ی P با هر یک از فضاهای S_m و S_n یک خط راست است. دو نقطه‌ی متمایز از هر یک از این دو خط در S_n یا S_m است پس هر یک از این دو خط به طور کامل در یکی از این دو فضا قرار دارند. درنتیجه این دو خط نمی‌توانند متقاطع باشند چون در غیر این صورت نقطه‌ی تقاطعشان در هر دو فضای S_m و S_n قرار دارد، در حالی که این دو فضا جدا از هم‌اند و اشتراک‌شان تهی است. بنابراین امتدادهای AC و BD هر دو در صفحه‌ی P هستند و متقاطع نیستند یعنی با هم موازی‌اند. از سوی دیگر فرض کرده‌ایم که پاره‌خط‌های AB و CD با هم موازی می‌باشند، پس اضلاع چهارضلعی ABCD که کاملاً در صفحه‌ی P قرار دارد، دو به دو با هم موازی‌اند. بنابراین ABCD یک متوازی‌الاضلاع است و اضلاع روبروی آن یعنی پاره‌خط‌های AB و CD با هم برابر هستند. پس ثابت می‌شود که پاره‌خط‌های موازی که به دو فضای موازی محدود باشند با هم برابرند.

قضیه: عمودی که از یک نقطه چون A بیرون از یک فضای n بعدی مانند S_n بر آن فضا رسم شود، کوتاه‌ترین واصل بین آن نقطه و آن فضا است.

برهان: از A بر S_n عمودی رسم کرده و پای آن را H می‌نامیم. نقطه‌ی M متمایز با H را در S_n بر می‌گزینیم. دو نقطه‌ی متمایز H و M هر دو در S_{n-1} قرار دارند بنابراین امتداد HM کاملاً در S_{n-1} قرار دارد. AH بر S_n عمود است پس بر هر خط درون آن از جمله امتداد HM عمود است. در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه‌ی Δ HAM پاره‌خط AH که ضلع مجاور به زاویه‌ی راست است از وتر AM کوچک‌تر است، یعنی AH از هر واصل دیگر بین O و S_n کوتاه‌تر می‌باشد. چنانچه پیش از این هم گفته شد، طول این کوتاه‌ترین واصل را فاصله‌ی یک نقطه از یک فضای چندبعدی گویند.

قضیه: اگر خطوط دو گروه خط n تایی نظیر به نظیر با هم موازی باشند، فضای حامل های آن دو نیز با هم موازی‌اند.

برهان: قضیه هنوز ثابت نشده است.

قضیه: اگر S_k با S_m و S_m با S_n موازی باشد، آنگاه S_k با S_n موازی است. $(n \geq m \geq k)$

برهان: قضیه را در حالات زیر بررسی می‌کنیم:

اگر $k = ۰$ باشد، S_k نقطه است و می‌دانیم که نقطه با هر فضایی چون S_n موازی است.

به ازای $k \geq ۱$ گروه خط k تایی دلخواهی در S_k و یک خط آن مانند δ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که δ زیرفضای S_k است و S_k با S_m موازی می‌باشد، بنابراین δ با S_m موازی است $(m \geq k)$. در نتیجه در S_m می‌توان خطی مانند δ' موازی با δ رسم کرد $(m \geq ۱)$. از سوی دیگر δ' زیرفضای S_m بوده و S_m نیز با S_n موازی است، پس δ' موازی با S_n خواهد بود $(n \geq m)$. این بدان معنا است که در S_n خطی چون δ'' موازی با δ' وجود دارد $(n \geq ۱)$. اکنون δ و δ'' هر دو با δ' موازی هستند، پس با یکدیگر هم موازی‌اند. اگر این بار به جای δ این استدلال را برای دیگر خطوط گروه‌خط تکرار کنیم خواهیم دید که به ازای هر گروه خط k تایی در S_k ، در S_n هم گروه خطی k تایی وجود دارد که خطوط این دو نظیر به نظیر با هم موازی باشند. می‌دانیم که فضای حامل یک گروه‌خط k تایی، فضایی k بعدی است. در این مورد فضای حامل گروه خط نخست همان S_k است. فضای حامل گروه خط دوم را هم S'_k می‌نامیم. اینک بنا بر قضیه‌ی پیشین دو فضای k بعدی S_k و S'_k با هم موازی هستند. از دیگر سو S'_k به S_n تعلق دارد، پس S_k با S_n موازی است$(k \geq k \geq ۱)$.

قضیه: از هر نقطه خارج از یک فضای n بعدی یک و تنها یک فضای n بعدی موازی آن وجود دارد که این فضا منطبق بر فضای $n+۱$ بعدی است که فضای n بعدی و نقطه‌ی مفروض با هم تعیین می‌کنند.

برهان: بخش اول این قضیه مبنی بر وجود دست کم یک فضای n بعدی گذرنده از A و موازی با فضای S_n بر اساس اصل موضوعه‌ی دهم برقرار است. یعنی بدون اثبات این اصل بدیهی را پذیرفته‌ایم که از هر نقطه چون A خارج یک فضای n بعدی مانند S_n فضایی n بعدی موازی با S_n می‌گذرد. اکنون ثابت می‌کنیم که این تنها فضای n بعدی است که از A گذشته و با S_n موازی است. فرض می‌کنیم که دو فضای S'_n و S''_n گذرنده از A و موازی با S_n وجود داشته باشند. این دو فضای با یک فضا موازی‌اند پس بنا بر قضیه‌ی قبل با هم موازی هستند. از سوی جدا از هم نیز نیستند، چرا که در A مشترک‌اند، پس بنابر تعریف توازی بر هم منطبق‌اند و

در واقع یکی هستند. بنابراین ثابت شد که از هر نقطه خارج از یک فضای n بعدی یک و تنها یک فضای n بعدی موازی آن رسم می‌شود. اکنون S'_n در بر گیرنده‌ی A است، پس اجتماع S_n و S'_n شامل اجتماع S_n و A می‌باشد و فضای حامل اجتماع S_n و S'_n هم که فضایی n+۱ بعدی است، شامل فضای حامل اجتماع S_n و A می‌شود که آن هم فضایی n+۱ بعدی است و این دو فضای n+۱ بعدی بر هم منطبق‌اند. این بدان معنا است که S'_n واقع بر فضای حامل اجتماع S_n و A می‌باشد.

قضیه: در فضای مرجع IR^n اگر خط δ با فضای n-۱ بعدی S_{n-1} موازی نباشد، آن را در یک نقطه قطع می‌کند.

برهان: در آغاز فرض می‌کنیم که خط δ و فضای S_{n-1} متقاطع نباشند. در این حالت چون موازی هم نیستند پس متنافرند و نباید در فضای n بعدی بگنجند در حالی که هر دو در فضای مرجع IR^n جای گرفته‌اند. پس بنا بر برهان خلف این دو یکدیگر را قطع می‌کنند. چنانکه می‌دانیم فصل مشترک این دو فضا باید فضایی اقلیدسی باشد که در هردوی آنها و از جمله در خط δ می‌گنجد. یعنی این فصل مشترک یا خط است و یا نقطه. از سوی دیگر اگر این اشتراک خط باشد، آنگاه خط δ فضایی تک بعدی است که فضای تک بعدی فصل مشترک را در بر می‌گیرد و در نتیجه خط δ خود فصل مشترک و منطبق بر S_{n-1} می‌باشد و این خود حالتی از توازی است که در فرض قضیه رد شده است. بنابراین فصل مشترک خط δ و فضای S_{n-1} یک و تنها یک نقطه است و این دو یکدیگر را در آن نقطه قطع می‌کنند.

قضیه: در فضای مرجع IR^n خط δ و فضای n-۱ بعدی S_{n-1} را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که δ با S_{n-1} موازی نبوده و بر آن عمود هم نباشد. نیز خط δ′ را عمود بر S_{n-1} و گذرنده از نقطه‌ی تقاطع خط δ و فضای S_{n-1} در نظر می‌گیریم. اینک صفحه‌ی یگانه‌ای از δ و δ′ می‌گذرد که فضای S_{n-1} را در یک خط قطع می‌کند.

برهان: در آغاز فرض می‌کنیم که δ و δ′ هم‌راستا باشند. در این صورت δ′ هم مانند δ بر n-S ۱ عمود است و این خلاف فرض قضیه است. پس به برهان خلف ثابت شد که δ و δ′ ناهم‌راستا هستند. بر اساس قضیه‌ی پیشین خط δ و فضای n−۱ بعدی S_{n-1} یکدیگر را در

یک و تنها یک نقطه مانند O قطع می‌کنند که δ هم از آن نقطه می‌گذرد. یعنی δ و δ' در O متقاطع‌اند و نیز ناهم‌راستا هستند پس یک و تنها یک صفحه مانند P از آن دو می‌گذرد. اکنون باید ثابت کنیم که فصل مشترک صفحه‌ی P و فضای $S_{n-۱}$ که هر دو دست کم در O متقاطع‌اند یک خط راست است.

می‌دانیم که صفحه‌ی P زیرفضای $S_{n-۱}$ نیست، چون اگر باشد $S_{n-۱}$ خط δ را به کلی در بر می‌گیرد و این بنا بر فرض قضیه که بر ناموازی و درنتیجه نامنطبق بودن δ و $S_{n-۱}$ اشاره می‌کرد، امکان‌پذیر نیست. پس فصل مشترک P و $S_{n-۱}$ نمی‌تواند یک صفحه باشد. حال اگر این فصل مشترک یک نقطه باشد، آنگاه بنا بر اصل هشتم فضای دوبعدی P و فضای $n-۱$ بعدی $S_{n-۱}$ روی هم رفته فضای یک $n+۱$ بعدی را معین می‌کنند و در فضایی n بعدی نمی‌گنجند و این خلاف فرض است زیرا می‌دانیم که دو فضای یادشده در فضای مرجع n بعدی ما نمی‌گنجند:

$$۲+(n-۱) = i+u \quad \Rightarrow \quad n+۱= ۰+u \quad \Rightarrow \quad u = n+۱$$

بنابراین فصل مشترک صفحه‌ی P و فضای $S_{n-۱}$ یک نقطه و یا یک صفحه نیست و چون فضایی اقلیدسی است که در صفحه‌ی P هم می‌گنجد، پس یک و تنها یک خط راست می‌باشد.

۲

تبدیل‌های هندسی در فضای چندبعدی

تبدیل و انواع آن

در آغاز مفهوم تبدیل را تعریف می‌کنیم: در یک فضای مرجع n بعدی به نام IR^n ، تبدیل T به ضابطه‌ای گفته می‌شود که بر اساس آن هر نقطه‌ی M از IR^n به یک و تنها یک نقطه مانند M' در IR^n متناظر شود. اکنون M' را تبدیل یافته‌ی M با تبدیل T می‌نامیم و می‌گوییم **T تبدیلی از IR^n به IR^n است:**

$$T: IR^n \rightarrow IR^n$$

به بیانی دیگر می‌گوییم **تبدیل T نقطه‌ی M را به M' تبدیل می‌کند:**

$$T(M) = M'$$

در مورد تبدیل یافته‌ی یک شکل هم می‌توان نوشت تبدیل یافته‌ی هر شکل مجموعه‌ی تبدیل یافته‌های تک تک نقاط آن است:

$$T(F_n) = \{T(M)/\ M \in F_n\}$$

اکنون برخی از این تبدیل‌ها را تعریف کرده و به اثبات گزاره‌هایی درباره‌ی آنها می‌پردازیم:

تبدیل ثابت: تبدیلی است که در آن تبدیل یافته‌ی هر نقطه و درنتیجه تبدیل یافته‌ی هر شکل چندبعدی یک نقطه‌ی ثابت مانند O می‌باشد:

$$T(F_n) = O \quad , \quad T(M) = O$$

انتقال: در فضای مرجع IR^n بردار ثابت $\overrightarrow{AB}$ را در نظر می‌گیریم، از هر نقطه در IR^n می‌توان بردار $\overrightarrow{MM'}$ را مساوی با رسم نمود. اکنون M' را انتقال‌یافته‌ی نقطه‌ی M در انتقال به بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$T_{\overrightarrow{AB}}(M) = M' \quad , \quad T_{\overrightarrow{AB}}(F_n) = F_n'$$

تصویر: تبدیلی است که در آن تبدیل یافته‌ی هر نقطه مانند M بر روی فضای k بعدی S_k پای عمودی است که از نقطه‌ی M بر S_k وارد شود:

$$T_{S_k}(M) = M' \quad , \quad T_{S_k}(F_n) = F_n'$$

تبدیل همانی: تبدیلی است که در آن تبدیل یافته‌ی هر نقطه خود آن نقطه است. در این حالت از تعریف تبدیل یافته‌ی یک شکل نتیجه می‌شود که تبدیل یافته‌ی هر شکل در تبدیل همانی خود آن شکل است:

$$T(F_n) = F_n \quad , \quad T(M) = M$$

تقارن: نقطه‌ی M و فضای k بعدی S_k را در نظر می‌گیریم و از M بر S_k عمود MH را

وارد می‌کنیم و آن را به اندازه‌ی خود امتداد می‌دهیم تا به M' برسیم. اکنون M' را قرینه‌ی M نسبت به فضای S_k می‌نامیم و تبدیل انجام گرفته را تقارن می‌نامیم:

$$S_{S_k}(M)=M' \quad , \quad S_{S_k}(F_n)=F_n'$$

تجانس: عدد $k\neq 0$ و نقطه‌ی M و فضای m بعدی S_m را در نظر می‌گیریم از M بر S_m عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. اکنون به ازای هر نقطه‌ی M نقطه‌ای چون M' وجود دارد به گونه‌ای که M و M' و H در یک امتداد باشند، بسته به مثبت یا منفی بودن k نقاط M و M' در یک طرف یا دو طرف نقطه‌ی H قرار گیرند و اندازه‌ی پاره‌خط HM' برابر حاصل‌ضرب $|k|$ در اندازه‌ی پاره‌خط MH باشد. حال M' را مجانس M با نسبت تجانس k و نسبت به فضای S_m می‌نامیم و تبدیل انجام‌شده را تجانس نامیده و بسته به مثبت یا منفی بودن k تجانس را مستقیم یا معکوس می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$H_{Sm}^{k}(M)=M' \quad , \quad H_{Sm}^{k}(F_n)=F_n'$$

قضیه: در فضای مرجع IR^n قرینه‌ی هر شکل m بعدی نسبت به یک فضای k بعدی با خود آن شکل برابر است.

برهان: قضیه هنوز ثابت نشده است.

قضیه: مجانس هر شکل بسته‌ی n بعدی شکلی بسته و n بعدی است که حجم آن برابر است با حجم خود شکل ضرب در توان n ام نسبت تجانس.

$$F_n=H_{S_m}^{k}(F_n) \;\Rightarrow\; V(F_n')=k^n V(F_n)$$

برهان: قضیه هنوز ثابت نشده است.

قضیه: مجانس هر شکل در تجانس نسبت به یک فضای m بعدی چون S_m و با نسبت ۱ خود آن شکل است.

(تجانس با نسبت ۱ همان تبدیل همانی است.)

برهان: اگر k=۱ آنگاه رابطه‌ی $\overrightarrow{HM'}=\overrightarrow{HM'}$ برقرار است، پس مجانس هر نقطه در تجانس نسبت به هر فضا و با نسبت یک بر خود آن نقطه منطبق است و داریم:

$$H_{S_m}^{1}(M)=M \quad , \quad H_{S_m}^{1}(F_n)=F_n$$

قضیه: مجانس هر شکل نسبت به یک فضای m بعدی چون S_m و با نسبت ۱- ، قرینه‌ی آن شکل نسبت به S_n است.

(تجانس با نسبت ۱- همان تقارن است.)

برهان: اگر k=-۱ باشد، $\overrightarrow{HM'}=-\overrightarrow{HM'}$ خواهد بود، و چون H پای عمود مرسوم از M بر S_n است، پس مجانس هر نقطه قرینه‌ی آن نقطه نسبت به S_n است و بنابراین:

$$H_{S_m}^{-1}(M)=S_{S_m}(M') \quad , \quad H_{S_m}^{-1}(F_n)=S_{s_m}(F_n')$$

قضیه: در فضای مرجع IR^n انتقال یافته‌ی هر شکل n بعدی با آن شکل به طور مستقیم برابر است.

(انتقال یافته‌ی هر شکل با آن همسو است.)

برهان: راه حل اثبات برابری همانند اثبات این قضیه در هندسه‌ی مسطحه‌ی اقلیدسی می‌باشد و برای اثبات همسو بودن چنین گوییم که شکل F'_n انتقال یافته‌ی شکل F_n در انتقال به بردار $\overrightarrow{AB}$ است، پس شکل F'_n انتقال یافته‌ی شکل F_n در انتقال به بردار $\overrightarrow{BA}$ می‌باشد یعنی هر نقطه از F_n با استفاده از انتقال $\overrightarrow{AB}$ بر نقطه‌ی متناظر خود در F'_n منطبق شده و نیز هر نقطه از F_n با استفاده از انتقال $\overrightarrow{BA}$ بر نقطه‌ی متناظر خود در F_n منطبق می‌گردد، بنابراین دو شکل بدون خروج از فضای مرجع IR^n و تنها با انتقال در فضای مرجع، یکدیگر را پوشانیده و با هم همسو می‌باشند.

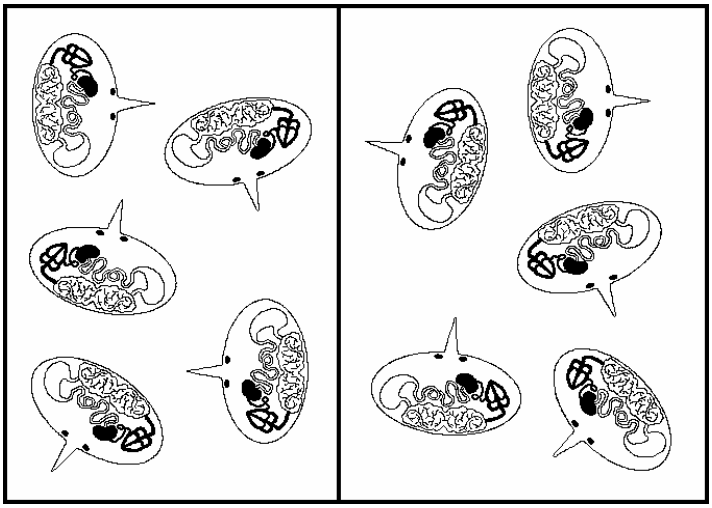
اشکال همسو و ناهمسو

در فضای مرجع n بعدی، دو شکل برابر n بعدی نسبت به هم دو حالت ممکن دارند:

(الف) دو شکل با تبدیل‌های هندسی دوران و انتقال در آن فضای n بعدی قابل انطباق بر

یکدیگر هستند.

(ب) دو شکل با تبدیل‌های هندسی دوران و انتقال در آن فضای n بعدی یکدیگر را نمی‌پوشانند. در این حالت برای این که دو جسم کاملاً یکدیگر را بپوشانند، علاوه بر تبدیل‌های نام برده ناچاریم که تبدیلی دیگر چون تقارن را نیز به کار بگیریم. اکنون بنا به قرارداد یکی از این اجسام را *مستقیم* و دیگری را *معکوس* می‌نامیم.



در این بخش ثابت می‌کنیم که هر مجموعه‌ی شامل شکل‌های برابر را می‌توان به دو زیرمجموعه به نام‌های S و O افراز کرد به‌گونه‌ای که اعضای یکی از آنها (S) مستقیم و اعضای دیگری (O) معکوس باشند. در این حالت همان‌گونه که در این بخش ثابت خواهد شد اعضای هر یک از این دو زیرمجموعه قابل انطباق بر یکدیگر هستند ولی بر اعضای زیرمجموعه‌ی دیگر منطبق نمی‌شوند. از این رو اعضای هر زیرمجموعه به طور مستقیم با هم برابرند و می‌گوییم *همسو* هستند و نیز اعضای یک زیرمجموعه به طور معکوس با اعضای دیگری برابر می‌باشند و می‌گوییم *ناهمسو* هستند. همچنین هر تبدیلی که در آن تبدیل یافته‌ی یک شکل با خود آن شکل برابر و همسو باشد را *تبدیل همسو* می‌گوییم. اگر هم حاصل تبدیل با خود شکل برابر و ناهمسو باشد، آن تبدیل را *تبدیل ناهمسو* می‌نامیم. با این تعریف و استفاده از تعریف همسویی می‌توان نتیجه گرفت که تبدیلات همانی، دوران و انتقال تبدیلاتی همسویند.

نکته‌ای که اکنون لازم به ذکر است ارتباط میان رویه‌های یک فضای چندبعدی و همسویی و ناهمسویی است. در واقع هر فضای اقلیدسی، فضای اقلیدسی یک بعد بالاترش را به دو نیم می‌کند. برای نمونه نقطه خط را، خط صفحه را و صفحه نیز فضا را نصف می‌کنند. از این رو هر فضای اقلیدسی در فضای مرجع یک بعد بالاترش دو رویه دارد. برای موجودات سه‌بعدی چون ما تنها صفحه است که دو رو دارد، زیرا دو رویه‌ی فضاهای سه‌بعدی و بالاتر را درک نمی‌کنیم و نیز از هر سو به نقطه و خط می‌نگریم رویه می‌بینیم! در واقع فضای سه‌بعدی ما هم تنها در یک فضای چهاربعدی دارای دو رویه است و رویه‌های آن در فضای پنج‌بعدی و بالاتر معنایی ندارند.

چنان که در همین بخش به طور کامل‌تر گفته خواهد شد برای تبدیل یک شکل به ناهمسوی آن می‌توان نوع ویژه‌ای از تبدیل تقارن را به کار برد، اما تبدیل تقارن تنها روش این کار نیست و راه حل دیگری نیز وجود دارد. ما می‌توانیم شکل را از فضای n بعدی خود خارج کرده و پس از وارونه کردن دوباره آن را در فضای n بعدی قرار دهیم. در این حال هر شکل به شکل ناهمسوی خود تبدیل می‌شود و اشکال مستقیم و معکوس پس از این تبدیل روی یکدیگر منطبق می‌شوند. بنابراین اصطلاحاتی چون مستقیم و معکوس و نیز همسو و ناهمسوی اشکال n بعدی در فضاهای بیش از n بعد معنای خود را از دست می‌دهند و به طور کلی تنها در مورد اشکال نامتقارن n بعدی، و در فضای مرجع دو رویه‌ی n بعدی (مانند فضاهای اقلیدسی) تعریف می‌شوند.

برای نمونه در شکل بالا در یک فضای مرجع دوبعدی مجموعه‌ای از اشکال دوبعدی برابر به دو زیرمجموعه‌ی مستقیم (S) و معکوس (O) افراز شده است. هیچ‌کدام از این آدمک‌ها نمی‌توانند با جابه‌جا شدن در این فضا روی آدمک‌های ناهمسوی خود منطبق گردند. اما اگر یکی از آنها را از صفحه‌ی حاملشان بیرون آورده و پشت و رو کنیم، ناهمسوی خود را کاملاً می‌پوشانند. البته اگر بجای آدمک اشکالی متقارن چون دایره را به کار می‌بردیم، می‌توانستیم تنها با انتقال و دوران در فضای دوبعدی آنها را روی هم منطبق کنیم. به یاد داشته باشید که حتی اگر اشکال نامتقارن n بعدی را در فضایی با همان تعداد ابعاد در نظر بگیریم، باز هم ممکن است که اشکال همسو و ناهمسو روی هم منطبق شوند و این به شرطی ممکن است که فضای مرجع، فضایی *تک‌رویه* باشد. برای درک این واژه تکه‌ای نوار مستطیل‌مانند از یک کاغذ را به عنوان تکه‌ای از یک فضای دوبعدی اقلیدسی در نظر بگیرید. یکی از دو سر آن را در فضای سه‌بعدی

180° دوران دهید و حلقه وار به سر دیگر نوار بچسبانید. اکنون فضایی دوبعدی، نااقلیدسی و تک‌رویه به دست می‌آید که اگر بخواهیم آن را در یک فضای مرجع اقلیدسی بسنجیم، چیزی نیست مگر یک شکل باز سه‌بعدی. به این شکل در توپولوژی *نوار موبیوس* گفته می‌شود. دلیل این که این نوار یک رویه دارد این است که اگر از یک نقطه شروع به رنگ کردن سطح آن کنیم تمامی سطح آن رنگ می‌شود، اما دو رویه‌ی یک صفحه که فضایی اقلیدسی است می‌توانند ناهمرنگ باشند. اکنون اگر دو آدمک دوبعدی نامتقارن ناهمسو را یک جهان یک رویه‌ی دوبعدی (مانند نوار موبیوس) درنظر بگیریم، آن دو می‌توانند بدون خارج شدن از جهان دوبعدی‌شان با یک بار دور زدن نوار روی هم منطبق شوند و این تنها به دلیل این است که نوار موبیوس یک رویه دارد و مانند فضاهای اقلیدسی دورویه نیست. نکته‌ی قابل توجه این است که یک آدمک راست‌دست دوبعدی پس از دور زدن این نوار چپ‌دست شده و به تصویر خود در آینه‌ی تک‌بعدی تبدیل می‌گردد. البته باید به او حق بدهیم که پس از وارونه شدن همچنان خود را راست‌دست بپندارد و گمان کند که این همه‌ی مردم دنیا هستند که چپ‌دست شده‌اند!

فضای تک‌رویه‌ی دیگری که قابل توجه ماست، *بطری کلین* می‌باشد. این شکل همانند نوار موبیوس است با این تفاوت که برای ساختن آن باید یک شکل سه‌بعدی بسته مانند منشور را در فضای چهاربعدی گرد صفحه‌ای که دو قاعده‌ی آن را قطع می‌کند دوران دهیم و سپس دو قاعده را مانند دو سر یک زنجیر به هم پیوند دهیم تا فضایی نااقلیدسی، سه‌بعدی و تک‌رویه به دست آید. بطری کلین در فضای مرجع اقلیدسی چهار بعدی تنها یک شکل باز است.

در جهان سه‌بعدی ما نمونه‌های بسیاری از اشکال همسو و ناهمسو وجود دارند. از قضایایی که در زیر ثابت می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که تصویر شما در آینه با خودتان ناهمسو است یعنی قلبش در طرف راست بدنش است! نیز در مبحث کربن‌های نامتقارن و ایزومرهای نوری در شیمی آلی، ایزومرهای راست‌گردان و چپ‌گردان با یکدیگر به طور معکوس برابرند (ناهمسو هستند) و روی هم منطبق نمی‌شوند مگر آن که یکی از آنها از جهان سه‌بعدی ما خارج شده و به اندازه‌ی یک زاویه‌ی نیم صفحه دوران پیدا کرده و روی دیگری قرار گرفته و آن را بپوشاند. البته اگر جهان ما یک بطری کلین باشد، ایزومرهای نوری برای منطبق شدن روی هم نیازی به خروج از این بطری ندارند و مانند آدمکی که در نوار موبیوس زندگی می‌کند (و احتمالاً جهانش را بطری موبیوس می‌نامد) کافی است که یک بار بطری را دور بزنند.

قضایای تبدیل در هندسه‌ی ابعاد

اکنون درستی برخی از گزاره‌های اساسی را درباره‌ی تبدیل‌ها در هندسه‌ی ابعاد اثبات می‌کنیم. از این قضایا نتیجه می‌شود که همسویی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، اما رابطه‌ی ناهمسویی نه هم‌ارزی است و نه ترتیب:

قضیه: در فضای مرجع n بعدی دو شکل n بعدی برابر یا همسو هستند و یا ناهمسو. (در فضای مرجع n بعدی هر مجموعه‌ی اشکال برابر را می‌توان به دو زیر مجموعه‌ی مستقیم و معکوس افراز نمود.)

برهان: بدیهی است که دو شکل برابر یا با تبدیلات همسو بر یکدیگر منطبق می‌شوند و یا نمی‌شوند و جز این ممکن نیست. در حقیقت تعریف دودویی که از همسویی و ناهمسویی کردیم به ما اجازه می‌دهد که مجموعه‌ی اشکالی که با هم برابرند را به دو زیرمجموعه‌ی همسو و ناهمسو افراز کنیم.

قضیه: هر شکل با خودش همسو است. (همسویی ویژگی بازتابی دارد.)

برهان: اثبات این قضیه از قضیه‌ی قبل هم آسان تر است: هر شکل با یک تبدیل همسو مانند تبدیل همانی یا انتقال به بردار صفر بر خودش منطبق شده و با خودش همسو است.

قضیه: اگر یک شکل با دیگری همسو باشد، دومی نیز با اولی همسو است. (همسویی ویژگی تقارنی دارد.)

برهان: اگر F_n با F'_n همسو باشد، یعنی F_n با تبدیل‌های همسو می‌تواند بر F'_n منطبق شود. این در حالی است که اگر انتقال یافته‌ی هر شکل با بردار AB را تحت بردار AB انتقال دهیم، بر شکل اولیه منطبق می‌شود و نیز اگر دوران‌یافته‌ی هر شکل حول فضای $S_{n-۲}$ و با زاویه‌ی θ را حول همان فضا و با زاویه‌ی $-\theta$ دوران دهیم، تبدیل یافته در مکان شکل نخست قرار می‌گیرد. بنابراین برای همه‌ی مراحل تبدیل F_n به F'_n انتقال یا دورانی وجود دارد که برعکس آن عمل می‌کند. یعنی F_n تنها با به‌کارگیری تبدیلات همسو بر F'_n منطبق می‌شود.

قضیه: اگر یک شکل با دیگری ناهمسو باشد، دومی نیز با اولی ناهمسو است.

(ناهمسویی بودن ویژگی تقارنی دارد.)

برهان: فرض می‌کنیم که F_n با F'_n ناهمسو باشد. اکنون بر اساس برهان خلف ثابت می‌کنیم که F'_n هم با F_n ناهمسو است، زیرا اگر F'_n با F_n ناهمسو نباشد، پس همسو است و بنا بر قضیه‌ی پیشین باید F_n با F'_n همسو باشد و این خلاف فرض قضیه است.

قضیه: دو شکل همسو با یک شکل، با یکدیگر همسویند.

(همسویی ویژگی تراگذری دارد.)

برهان: فرض می‌کنیم که شکل F_n با F'_n و F'_n هم با F''_n همسو است. اکنون F_n با بدیل‌های همسو قابل انطباق بر F'_n و F'_n هم به همین ترتیب قابل انطباق بر F''_n می‌باشد. بنابراین می‌توان F_n را با تبدیل‌های دوران و انتقال در فضای مرجع n بعدی بر F'_n و سپس بر F''_n منطبق کرد. یعنی F_n و F''_n که هر دو با F'_n همسویند، با یکدیگر هم همسو خواهند بود.

قضیه: ناهمسوی همسوی هر شکل با آن شکل ناهمسو است.

برهان: شکل F_n و همسویش F'_n و نیز ناهمسوی F'_n یعنی F''_n را در نظر می‌گیریم. چون همسو و ناهمسوی هر شکل با خود آن شکل برابر است، پس F_n و F'_n با هم برابر بوده و نیز F'_n و F''_n هم با هم برابرند. اکنون بنا بر ویژگی تراگذری برابری دو شکل F_n و F''_n هم با یکدیگر برابر هستند. این بدان معنا است که این دو شکل یا همسویند و یا ناهمسو. از همسویی F_n و F'_n می‌فهمیم که F'_n با تبدیلات همسو بر F_n منطبق می‌شود.

اینک فرض می‌کنیم که F_n و F''_n هم همسو باشند، یعنی F_n هم با تبدیلات همسو بر F''_n منطبق گردد. از دو گزاره‌ی زیر نتیجه می‌شود که F'_n با تبدیلات همسو F''_n را می‌پوشاند. این نتیجه نشانه‌ای از همسویی F'_n و F''_n است که با فرض قضیه در تناقض می‌باشد، پس به برهان خلف ثابت می‌شود که F_n و F''_n نمی‌توانند همسو باشند. پس به خاطر برابری‌شان ناهمسو هستند.

قضیه: ناهمسوی ناهمسوی هر شکل با آن شکل همسو است.

برهان: مانند قضایای قبل شکل F_n و مجموعه‌ی اشکال همسو با آن (S) و نیز مجموعه‌ی اشکال ناهمسو با آن (O) را در نظر می‌گیریم. اکنون می‌دانیم که هر شکلی که با F_n ناهمسو باشد، در مجموعه‌ی O قرار دارد. نیز هر شکلی که با اعضای O ناهمسو باشد، حتماً یکی از اعضای S است. بنابراین ناهمسوی اعضای O (که خود ناهمسوی F_n هستند) از اعضای S (مجموعه‌ی اشکال همسو با F_n) خواهد بود و این بدان معنا است که ناهمسوی ناهمسوی F_n با F_n همسو است.

از قضایای پیشین نتیجه گرفتیم که مجموعه‌ی اشکالی که با شکل دلخواه F_n و در نتیجه با یکدیگر برابرند را می‌توان به دو زیرمجموعه مانند S و O افراز نمود، به گونه‌ای که اعضای S با F_n همسو و اعضای O با آن ناهمسو باشند. اکنون هنگام آن است که گزاره‌های ثابت شده را جمع‌بندی کنیم:

هر عضوی که با F_n برابر باشد، یا در S قرار دارد و یا در O .

اعضای مجموعه‌ی S با یکدیگر و نیز اعضای مجموعه‌ی O با یکدیگر همسویند.

اعضای مجموعه‌ی S با اعضای مجموعهٔ O ناهمسویند.

قضیه: در فضای مرجع n بعدی IR^n قرینه‌ی هر شکل n بعدی نسبت به یک فضای k بعدی با خود آن شکل همسو است اگر و تنها اگر n-k زوج باشد و با آن ناهمسو است، اگر و تنها اگر n-k فرد باشد.

برهان: قضیه هنوز ثابت نشده است.

۳

اشکال هندسی در هندسه‌ی ابعاد

تا کنون در هندسه‌ی اقلیدسی مسطحه یا فضایی شکل‌های هندسی گوناگونی را مورد بررسی قرار داده‌ایم و روابط حاکم بر آنها را بدست آورده‌ایم، ولی هنگامی که ما به طور کلی درباره‌ی یک فضای چندبعدی گفتگو می‌کنیم به دلیل نامعلوم بودن تعداد ابعاد آن ناچاریم که شکل‌های هندسی را در گروه‌های فراگیرتری طبقه بندی کنیم و آنها را با نام‌هایی چون منشور، استوانه، مخروط، مکعب، گوی (کره) و هرم چندبعدی تعریف کرده و روابط حاکم بر آنها را به دست آوریم.

چنانکه خواهیم دید بر اساس این طبقه‌بندی، یک گوی تک‌بعدی معادل دو نقطه‌ی متمایز بوده و آنچه که ما به نام مثلث می‌شناسیم، می‌تواند یک هرم و یا یک مخروط دوبعدی باشد. نکته‌ای که در اینجا توجه به آن بسیار مهم است این است که از آنجا که تعریف بیشتر اشکال هندسی چندبعدی از نوع بازگشتی است، باید توجه داشت که هر شکل هندسی صفربعدی یک نقطه است.

اکنون به تعریف و بررسی هر یک از این اشکال هندسی چندبعدی می‌پردازیم:

منشور

سطح منشوری چندبعدی:[1] در فضای مرجع n بعدی IR^n شکل بسته‌ی n−۱ بعدی F_{n-1} و امتداد Δ غیر موازی با فضای حامل آن را در نظر می‌گیریم. اکنون مجموعه‌ی خطوطی را که هر یک بر نقطه‌ای از F_{n-1} بگذرند و با امتداد Δ موازی باشند، سطح منشوری n بعدی می‌نامیم. خطوط موازی با امتداد Δ که از نقاط F_{n-1} می‌گذرند را **مولد سطح منشوری** می‌نامیم.

منشور چندبعدی: منشور n بعدی شکلی است که به یک سطح منشوری n بعدی و دو فضای n−۱ بعدی موازی چون S_{n-1} و S'_{n-1} که در فضای n بعدی در بر گیرنده‌ی سطح منشوری قرار دارند، محدود باشد. فصل مشترک سطح منشوری n بعدی با دو فضای n−۱ بعدی دو شکل بسته‌ی n−۱ بعدی می‌باشد که آنها را *قاعده‌ی منشور* می‌نامیم. فاصله‌ی دو فضای موازی S_{n-1} و S'_{n-1} را *ارتفاع منشور* می‌نامند.

منشور قائم چندبعدی: منشوری است که در آن مولد بر فضای حامل قاعده‌ها (فضاهای S_{n-1} یا S'_{n-1}) عمود است.

قضیه: هر منشور n بعدی یک شکل n بعدی است.

برهان: در آغاز فرض می‌کنیم که منشور n بعدی در یک فضای n−۱ بعدی مانند S_{n-1} بگنجد. در این صورت S_{n-1} قاعده‌ی منشور را در بر گرفته و چون تنها یک فضای n−۱ بعدی قاعده‌ی n−۱ بعدی را در بر می‌گیرد، پس S_{n-1} فضای حامل قاعده است. از سوی دیگر چون تمامی منشور در S_{n-1} قرار دارد، پس مولدهای آن هم در S_{n-1} قرار دارند. درنتیجه مولدهای

[1] سطح منشوری بر خلاف اسمش تنها از جنس دوبعدی نیست و بسته به تعداد ابعاد منشور می تواند از جنس طول، حجم و ... نیز باشد.

منشور با فضای حامل قاعده موازی هستند و این بر خلاف تعریف منشور است.

می‌دانیم که دو فضای n-۱ بعدی حامل قاعده چون موازی و جدا از هم‌اند یک و تنها یک فضای n بعدی چون S_n را مشخص می‌کنند. اینک از هر مولد منشور دو نقطه‌ی متمایز (دو نقطه‌ی متناظر روی دو قاعده) در S_n قرار دارد. بنابراین تمامی مولدها و درنتیجه خود منشور در این فضای n بعدی قرار دارند. پس ثابت شد که یک منشور همواره در یک فضای n بعدی می‌گنجد، اما در هیچ فضای n-۱ بعدی جای نمی‌گیرد. بنابراین یک منشور بر اساس تعریف یک شکل n بعدی بوده و قضیه ثابت است.

در اینجا به جا است که بند پنجم اصول مربوط به تعریف حجم یادآوری شود: *حجم درجه‌ی n یک منشور n بعدی برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع آن در حجم درجه‌ی n-۱ قاعده‌اش*. با دقت در این اصل یک پرسش به ذهن خطور می‌کند. با توجه به اینکه منشور دو قاعده دارد، کدام یک از دو قاعده در این اصل مورد نظر است؟ برای پاسخ دادن به این پرسش باید نشان داده شود که دو قاعده‌ی یک منشور با هم برابر هستند. این بدان معنا است که همه‌ی مشخصات آنها از جمله حجم درجه‌ی n-۱ آنها نیز با هم برابر خواهد بود و از همین رو است که در این اصل تفاوتی ندارد که کدام قاعده در نظر گرفته شود. برای اثبات برابری دو قاعده‌ی منشور قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه: دو قاعده‌ی منشور با هم برابرند.

برهان: قضیه هنوز ثابت نشده است.

گوی

گوی چندبعدی: گوی n بعدی ($\Re_{n-1}$) مجموعه‌ی نقاطی از یک فضای n بعدی است که از یک نقطه واقع بر آن فضای n بعدی به یک فاصله باشند. این نقطه‌ی ثابت را *مرکز گوی چندبعدی* می‌نامند و آنرا با O نشان می‌دهند. همچنین این فاصله‌ی ثابت که عددی نامنفی است *شعاع گوی چندبعدی* می‌باشد و با R نشان داده می‌شود. اگر شعاع گوی صفر باشد گوی

چندبعدی تنها از یک نقطه (مرکز گوی) تشکیل شده است. اگر شعاع مثبت باشد، گوی n بعدی یک شکل n بعدی است و مانند هر شکل دیگر فضای حامل آن یک فضای n بعدی یگانه است. گوی با شعاع منفی نیز وجود ندارد و به عبارت دیگر تهی است و هیچ نقطه‌ای از فضا را در بر نمی‌گیرد. در حالت خاص و برای فضای بدون بعد باید گفت که گوی صفر بعدی با شعاع صفر یک نقطه است، گوی صفر بعدی با شعاع غیر صفر (مثبت و یا منفی) تهی بوده و از هیچ نقطه‌ای تشکیل نشده است.

گوی را می‌توان تعمیم اشکالی چون دایره و کره در نظر گرفت. یک گوی صفربعدی همانند هر شکل صفربعدی دیگر یک نقطه است. گوی تک‌بعدی عبارت از دو نقطه‌ی متمایز است. گوی دوبعدی دایره و گوی سه‌بعدی کره می‌باشد. برای هر گوی چنانکه گفتیم شعاع تعریف می‌شود. اگر شعاع گوی (خط واصل بین یک نقطه‌ی دلخواه از گوی و مرکز آن) را امتداد دهیم تا در سوی دیگر کره را قطع کند پاره‌خطی پدید می‌آید که دو برابر شعاع طول داد و آن را *قطر گوی چندبعدی* می‌نامند.

یک گوی n بعدی با شعاع مثبت یک شکل بسته است. اثبات این گزاره را به دلیل اینکه بسته بودن از مفاهیم نخستین است رها می‌کنیم و تنها به این بسنده می‌کنیم که یک گوی n بعدی فضای حامل n بعدی خود را به سه ناحیه درون، پیرامون و بیرون گوی تقسیم می‌کند و بنابراین حجم برای آن تعریف می‌شود.

اکنون قضیه‌ای را اثبات می‌کنیم که برای محاسبه‌ی حجم اشکال هندسی n بعدی بسیار پر کاربرد است. پس از آن حجم و سطح گوی n بعدی را با استفاده از آن به دست می‌آوریم:

قضیه: شکل n بعدی بسته‌ی F_n و فضای حامل آن S_n را به عنوان فضای مرجع، و در آن فضا یک فضای n−۱ بعدی چون S_{n-1} را در نظر می‌گیریم. در این فضای مرجع محور دلخواه $x'Ox$ را عمود بر فضای S_{n-1} رسم می‌کنیم. اکنون فضای S'_{n-1} را موازی با S_{n-1} رسم می‌کنیم به گونه‌ای که از نقطه‌ای به طول x بر محور $x'Ox$ بگذرد. فصل مشترک F_n و S'_{n-1} را F_k می‌نامیم. به ازای هر x اگر F_k یک شکل n بعدی بسته باشد، تابع $f(x)$ را برابر با حجم درجه‌ی n−۱ شکل F_k در نظر می‌گیریم و در غیر این صورت به آن مقدار صفر می‌دهیم. اینک اگر تابع $f(x)$ روی IR پیوسته باشد، حجم درجه‌ی n شکل n بعدی بسته‌ی

F_n برابر است با:

$$V_n(F_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

برهان: تابع $f(x)$ برای هر x یا صفر است و یا برابر با حجم درجه‌ی n−۱ یک شکل n−۱ بعدی بسته می‌باشد، پس $f(x)$ به ازای هر عدد حقیقی تعریف شده و نامنفی است. اینک امتداد Δ را موازی با محور $x'Ox$ رسم می‌کنیم. این امتداد بر S_{n-1} عمود خواهد بود. می‌دانیم که برای هر x یک و تنها یک فضای n−۱ بعدی مانند S'_{n-1} موازی با S_{n-1} رسم می‌گردد. چون S'_{n-1} با S_{n-1} موازی است، بنابراین امتداد Δ بر S'_{n-1} هم عمود است. Δ و S'_{n-1} نمی‌توانند با هم موازی باشند، چون عمودند و نیز نمی‌توانند متنافر باشند چون در آن صورت در یک فضای n بعدی جای نمی‌گیرند، پس با هم متقاطع‌اند. نقطه‌ی تقاطع آنها هم یک خط نیست، چون آن دو به علت موازی نبودن منطبق هم نیستند. پس خط Δ و فضای S'_{n-1} یکدیگر را در یک و تنها یک نقطه قطع می‌کنند. اینک اگر شرط $f(x)<0$ برقرار باشد، به مرکز این نقطه‌ی اشتراک یک گوی n−۱ بعدی را واقع بر فضای S'_{n-1} رسم می‌کنیم، به‌گونه‌ای که حجم آن گوی برابر با $f(x)$ باشد. اگر این کار را برای هر مقدار حقیقی x انجام دهیم، از اجتماع این گوی‌های n−۱ بعدی شکلی n بعدی مانند F'_n به وجود می‌آید. اکنون هر فضای n−۱ بعدی که به ازای هر x از نقطه‌ای به طول x موازی با n-S ۱ می‌گذرد، یا هیچ یک از اشکال F_n و F'_n را قطع نمی‌کند و یا هر دوی آنها را در شکلی n−۱ بعدی و بسته با حجم n−۱ بعدی $f(x)$ قطع می‌نماید. بنابر اصل موضوعه‌ی پنجم حجم درجه‌ی n هر دو شکل F_n و F'_n با هم برابر است و برای یافتن حجم F_n کافی است حجم درجه‌ی n شکل F'_n را محاسبه کنیم. برای این کار تابع $V(x)$ را تعریف می‌کنیم:

$F_n(a,b)$ را مکان هندسی نقاطی از شکل F_n می‌گیریم که بر فضایی n−۱ بعدی موازی با S_{n-1} قرار داشته باشند به گونه‌ای که آن فضای n−۱ بعدی محور $x'Ox$ را در نقطه‌ای قطع کند که طول آن نقطه بر محور $x'Ox$ متعلق به بازه‌ی $[a,b]$ باشد. می‌دانیم که به ازای هر نقطه از F_n می‌توان فضایی n−۱ بعدی موازی با S_{n-1} رسم کرد و چنانکه گفته شد این فضا محور $x'Ox$ را در نقطه‌ی یگانه‌ای قطع می‌کند و از سوی دیگر طول این نقطه قطعاً در بازه‌ی $(-\infty, \infty)$ قرار دارد، بنابراین هر نقطه از شکل $F_n(-\infty, \infty)$ بر شکل F_n قرار دارد و برعکس. یعنی این دو شکل

بر هم منطبق‌اند و در واقع یکی هستند. اکنون تابع $V(x)$ را به صورت زیر تعریف کرده و حجم محدود از x تا $x+\Delta x$ را از آن نتیجه می‌گیریم:

$$V(x) = V_n(F_n(-\infty, x)) \quad \Rightarrow \quad V(x+\Delta x) - V(x) = V_n(F_n(x, x+\Delta x))$$

چون تابع $f(x)$ تابعی پیوسته است پس در بازه‌ی $[x, x+\Delta x]$ دارای بیشینه و کمینه است. مقداری از x را که به بازه‌ی مذکور تعلق دارد و به ازای آن $f(x)$ بیشینه است x_{max} و نیز آن مقدار از x را که به بازه‌ی مذکور تعلق دارد و به ازای آن $f(x)$ کمینه است x_{min} می‌نامیم. اینک شکل $F_n(x, x+\Delta x)$ درون منشوری با قاعده‌ی $f(x_{max})$ و ارتفاع Δx قرار دارد و نیز منشوری به قاعده‌ی $f(x_{min})$ و ارتفاع Δx کاملاً درون شکل $F_n(x, x+\Delta x)$ قرار دارد. اینک نابرابری‌های زیر را می‌توان از تعریف حجم نتیجه گرفت:

$$f(x_{min})\Delta x \le F_n(x, x+\Delta x) \le f(x_{max})\Delta x$$

$$f(x_{min}) \le V(x+\Delta x) - V(x)\ \Delta x \le f(x_{max})$$

اکنون چون تابع $f(x)$ پیوسته است و نیز نابرابری‌های $x \le x_{min}$ ، $x_{max} \le x+\Delta x$ هم برقرار است، بنابراین در هنگامی که Δx به صفر میل می‌کند، x_{max} و x_{min} هم به x میل می‌کنند، یعنی:

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_{max} = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x_{max}) = f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} x_{min} = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} f(x_{min}) = f(x)$$

بنابراین اگر Δx به صفر میل کند، $f(x_{min})$ و $f(x_{max})$ هر دو به $f(x)$ میل می‌کنند و اینک بر اساس قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$V'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = f(x)$$

اینک برای اثبات حکم کافی است که انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} V'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dV(x) = V_n(F_n(-\infty,\infty)) - V_n(F_n(-\infty,-\infty)) = V_n(F_n)$$

و اثبات قضیه کامل می‌شود.

قضیه: فصل مشترک یک گوی n بعدی با یک فضای n-۱ بعدی که بر فضای حامل آن گوی واقع است و آن گوی را قطع می‌کند یک گوی n-۱ بعدی است.

برهان: شعاع گوی را R ، مرکزش را O ، فضای حامل آن را S_n و فضای n-۱ بعدی قاطع آن را S_{n-1} می‌نامیم. از O بر S_{n-1} عمود یگانه‌ی OH را وارد می‌کنیم و طول آن که عدد حقیقی مشخص و منحصر به فردی است را h می‌نامیم. اینک برای اثبات قضیه دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) فاصله‌ی مرکز گوی از S_{n-1} صفر است: فرض می‌کنیم که O خارج از S_{n-1} باشد. اینک طول OH صفر است و O بر H منطبق می‌باشد. یعنی O همان H بوده و درون S_{n-1} باشد و این خلاف فرض است، بنابراین نقطه‌ی O درون فضای S_{n-1} قرار دارد. اکنون فرض می‌کنیم که نقطه‌ی A روی فصل مشترک S_{n-1} و گوی n بعدی مفروض قرار داشته باشد. چون نقطه‌ی A روی گوی قرار دارد پس از O به فاصله‌ی ثابت R است و چون روی S_{n-1} است، بنابراین روی گوی n-۱ بعدی با فضای حامل S_{n-1} ، مرکز O و شعاع R قرار دارد. از سوی دیگر هر نقطه مانند B که روی یک گوی با فضای حامل S_{n-1} ، مرکز O و شعاع R قرار گیرد فاصله‌اش از O مقدار ثابت R است و در فضای S_n نیز قرار دارد. بنابراین بر گوی n بعدی مفروض واقع است. نقطه‌ی B بر فضای S_{n-1} نیز واقع است، پس بر فصل مشترک گوی n بعدی مفروض و S_{n-1} می‌باشد. درنتیجه فصل مشترک آن دو یک گوی n بعدی با مرکز O و شعاع R می‌باشد.

(ب) فاصله‌ی مرکز گوی از S_{n-1} بین صفر و R است: نقطه‌ی M را روی فصل مشترک گوی n بعدی و فضای S_{n-1} در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی M از O برابر با R است در حالی که فاصله‌ی H از O بین صفر و R است، پس M و H متمایزند. دو نقطه‌ی متمایز H و M هر دو در S_{n-1} قرار دارند بنابراین امتداد HM هم در S_{n-1} قرار دارد. نیز OH بر S_{n-1} عمود است، پس

بر هر خط آن مانند امتداد HM عمود بوده و زاویه‌ی $\angle OHM$ راست (قائمه) است و بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$HM=\sqrt{OM^{۲}-OH^{۲}}=\sqrt{R^{۲}-h^{۲}}$$

بنابراین هر نقطه که روی فصل مشترک گوی n بعدی و $S_{n-۱}$ قرار داشته باشد، بر یک و تنها یک گوی n−۱ بعدی با مرکز H ، شعاع $\sqrt{R^{۲}-h^{۲}}$ و فضای حامل $S_{n-۱}$ قرار دارد.

حال نقطه‌ی N را بر گوی منحصر به فرد n−۱ بعدی با مرکز H ، شعاع $\sqrt{R^{۲}-h^{۲}}$ و فضای حامل $S_{n-۱}$ در نظر می‌گیریم. چنان که گفته شد OH بر HN عمود است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ΔNOH بنا بر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$ON=\sqrt{OH^{۲}+HN^{۲}}=\sqrt{h^{۲}+\sqrt{R^{۲}-h^{۲}}}=R$$

پس نقطه‌ی N که در S_n است فاصله‌اش از O برابر با R بوده و درنتیجه بر گوی n بعدی نخست قرار دارد و چون بر $S_{n-۱}$ هم قرار دارد، پس بر فصل مشترک گوی n بعدی مذکور و $S_{n-۱}$ نیز واقع است. بنابراین فصل مشترک $S_{n-۱}$ و گوی n بعدی مذکور یکدیگر را در یک گوی n−۱ بعدی به مرکز H ، شعاع و فضای حامل $S_{n-۱}$ قطع می‌کنند.

(پ) فاصله‌ی مرکز گوی از $S_{n-۱}$ برابر با R است: در این حالت H بر $S_{n-۱}$ و $S_{n-۱}$ بر S_n قرار دارد، پس H بر $S_{n-۱}$ واقع است و از O به فاصله‌ی ثابت R می‌باشد، پس H بر گوی n بعدی مفروض قرار دارد. از سوی دیگر H بر $S_{n-۱}$ هم واقع است، بنابراین فصل مشترک $S_{n-۱}$ و گوی n بعدی مفروض شامل H است. اما هر نقطه روی فصل مشترک از O به فاصله‌ی ثابت R می‌باشد و تعداد این نقاط نمی‌تواند بیش از یکی باشد زیرا در غیر این صورت علاوه بر پای عمود نقطه‌ی دیگری هم بر $S_{n-۱}$ هست که فاصله‌اش از O برابر R می‌باشد. پس در این حال فضای $S_{n-۱}$ گوی n بعدی نامبرده را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کند و آن نقطه‌ی فصل مشترک می‌تواند یک گوی n−۱ بعدی با شعاع صفر به حساب آید.

(ت) فاصله‌ی مرکز گوی از $S_{n-۱}$ بیش از R است: در این حالت $S_{n-۱}$ گوی مفروض را قطع نمی‌کند، زیرا در غیر این صورت نقاط تقاطع که روی $S_{n-۱}$ قرار دارند از O به فاصله‌ی R

می‌شوند و این در شرایطی که کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقاط S_{n-1} از O (فاصله‌ی O از S_{n-1}) بیش از R است، ناممکن می‌باشد.

با توجه به چهار حالت بالا می‌توان نتیجه گرفت که یک گوی n بعدی یا با یک فضای n−۱ بعدی که بر فضای حامل آن گوی قرار دارد اشتراکی ندارد، و یا اینکه آن را در یک گوی n−۱ بعدی قطع می‌کند.

قضیه: حجم درجه‌ی n یک گوی n بعدی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V_n(R)=\lambda_n R^n \quad , \quad \lambda_n=\begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}!} & ;\ n=2k \\ \dfrac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-1}{2}!}{n!} & ;\ n=2k+1 \end{cases}$$

برهان: چون همه‌ی اشکال مورد بحث در فضای حامل گوی n بعدی می‌گنجند، آن فضای n بعدی را به عنوان فضای مرجع انتخاب می‌کنیم. فضای دلخواه S_{n-1} را در این فضای مرجع در نظر می‌گیریم. اینک خط d را در S_n عمود بر S_{n-1} رسم می‌کنیم. از مرکز گوی (نقطه‌ی O) فضای یگانه‌ی S'_{n-1} را موازی با S'_{n-1} رسم می‌نماییم. بنا بر قضایای پیشین d بر S_{n-1} عمود است پس بر هر فضای موازی هم بعد آن از جمله S'_{n-1} عمود است. پیش‌تر ثابت شد که در یک فضای مرجع n بعدی هرخط عمود بر یک فضای n−۱ بعدی آن فضا را در یک و تنها یک نقطه قطع می‌کند. پس خط d فضای S'_{n-1} را در دقیقاً یک نقطه قطع می‌کند. روی خط d محور $xO'x'$ را با جهت دلخواه و مبداء O' در نظر می‌گیریم. اکنون اگر از A روی محور $xO'x'$ و به طول x ، فضای n−۱ بعدی را عمود بر S_{n-1} رسم کنیم، این فضا یکی از حالات زیر را دارد:

(الف) S_{n-1} را قطع نمی‌کند که بر اساس قضیه‌ی پیشین $x\geq R$ یا $x\leq -R$ می‌باشد.

(ب) S_{n-1} را در یک نقطه (یک گوی n−۱ بعدی با شعاع صفر) قطع می‌کند که حجم درجه‌ی n−۱ آن صفر است که در این حال بنابر قضیه‌ی قبل $x=R$ یا $x=-R$ است. اندازه‌ی شعاع گوی صفر ($\sqrt{R^2-R^2}$) است.

(پ) S_{n-1} را در یک گوی n−۱ بعدی با شعاع قطع می‌کند که $-R\leq x\leq R$ می‌باشد.

اکنون از مرکز گوی (نقطه‌ی O) خطی عمود بر S'_{n-1} رسم می‌نماییم. طول ارتفاع OH به دست آمده را h می‌نامیم.

در فضای مرجع n بعدی دو امتداد OH و $xO'x'$ بر فضای n−۱ بعدی S'_{n-1} عمودند، پس OH و $xO'x'$ با هم موازی خواهند بود و از آن جا که فضاهای موازی بر خطوط موازی پاره‌خط‌های برابر را جدا می‌کنند، بنابراین:

$$OH=O'A \quad \Rightarrow \quad h=x$$

یعنی فضای n−۱ بعدی که از نقطه‌ی A به طول x موازی با S'_{n-1} رسم می‌شود، یا گوی را قطع نمی‌کند ($x \notin [-R,R]$) و یا آن را در یک گوی n−۱ بعدی با شعاع $\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{R^2-h^2}$ قطع می‌کند ($x \in [-R,R]$). اینک برای یافتن حجم درجه‌ی n گوی n بعدی بر اساس حجم درجه‌ی n−۱ گوی n−۱ بعدی، بر اساس قضایای همین بخش تابع $f(x)$ را که حجم درجه‌ی n−۱ فصل مشترک گوی n بعدی داده شده با فضای موازی مذکور است، تعریف کرده و انتگرال معین حجم گوی n بعدی را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x>R \\ V_{n-1}(\sqrt{R^2-x^2}) & ; \ -R\le x\le R \\ 0 & ; \ x<-R \end{cases}$$

$$V_n(R)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=\int_{-\infty}^{-R} 0\,dx+\int_{-R}^{R} V_{n-1}(\sqrt{R^2-x^2})dx+\int_{R}^{\infty} 0\,dx=\int_{-R}^{R} V_{n-1}(\sqrt{R^2-x^2})dx$$

می‌دانیم که گوی تک‌بعدی با شعاع R پاره‌خطی به طول ۲R است، یعنی حجم درجه‌ی یک آن ۲R می‌باشد. نیز سطح دایره یعنی حجم درجه‌ی دو گوی دوبعدی برابر با $\pi.R^2$ است:

$$\begin{cases} V_1(R) = \pi R \\ V_2(R) = 2\pi R^2 \\ V_3(R) = {}^3/_4\pi R^3 \end{cases}$$

می‌بینید که حجم گوی‌های یک، دو و سه‌بعدی برابر است با حاصل‌ضرب عددی ثابت در شعاع به توان تعداد ابعاد، پس مقدمه‌ی استقرا صادق است. حال فرض کنیم که حجم گوی n-۱ بعدی برابر با ضریبی ثابت ضرب در توان n-۱ ام R باشد. نیز فرض می‌کنیم که حجم گوی n-۲ بعدی برابر است با ضرب عددی ثابت در توان n-۲ ام R . سپس حکم استقرا را مبنی بر اینکه حجم گوی n بعدی نیز برابر با حاصل‌ضرب عددی ثابت در توان n ام R است، ثابت می‌نماییم:

$$V_{n-۱}(R) = \lambda_{n-۱} R^{n-۱}$$
$$V_{n-۲}(R) = \lambda_{n-۲} R^{n-۲}$$

$$\frac{V_n(R)}{\lambda_{n-۱}} = \int_{-R}^{R} (R^۲ - x^۲)^{\frac{n-۱}{۲}} dx = \left| \frac{x}{n}(R^۲ - x^۲)^{\frac{n-۱}{۲}} \right|_{-R}^{R} + \frac{n-۱}{n} R^۲ \int_{-R}^{R} (R^۲ - x^۲)^{\frac{n-۳}{۲}} dx = \frac{n-۱}{n} R^۲ \frac{V_{n-۲}(R)}{\lambda_{n-۳}}$$

پس با به‌کارگرفتن استقرا ثابت می‌شود که حجم گوی n بعدی نیز برابر با حاصل‌ضرب عددی ثابت در شعاع به توان n است. اینک مقدار این ضریب ثابت (λ_n) را که هدف نهایی قضیه است، به دست می‌آوریم:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-۱}} = \frac{n-۱}{n} \cdot \frac{\lambda_{n-۲}}{\lambda_{n-۳}} = \frac{n-۱}{n} \cdot \frac{n-۳}{n-۲} \cdots \begin{cases} \frac{۳}{۴} \cdot \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{۳}{۴} \cdot \frac{\pi}{۲} = \frac{۳}{۴} \cdot \frac{۱}{۲} \pi & ; \quad n = ۲k+۱ \\ \frac{۴}{۵} \cdot \frac{\lambda_۳}{\lambda_۲} = \frac{۴}{۵} \cdot \frac{۴}{۳} = \frac{۴}{۵} \cdot \frac{۲}{۳} ۲ & ; \quad n = ۲k \end{cases}$$

از ساده کردن کسرها در فرمول بالا، رابطه‌ی روبرو نتیجه گرفته می‌شود:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-۲}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-۱}} \cdot \frac{\lambda_{n-۱}}{\lambda_{n-۲}} = \frac{۲\pi}{n}$$

$$\frac{\lambda_{۲k}}{\lambda_۲} = \frac{\lambda_{۲k}}{\lambda_{۲k-۲}} \cdot \frac{\lambda_{۲k-۲}}{\lambda_{۲k-۴}} \cdot \frac{\lambda_{۲k-۴}}{\lambda ۲k-۶} \cdots \frac{\lambda_۴}{\lambda_۲} = \frac{\pi}{k} \cdot \frac{\pi}{k-۱} \cdot \frac{\pi}{k-۲} \cdots \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi^{k-۱}}{k!} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{۲k} = \frac{\pi^k}{k!}$$

$$\frac{\lambda_{۲k+۱}}{\lambda_۱} = \frac{\lambda_{۲k+۱}}{\lambda_{۲k-۱}} \cdot \frac{\lambda_{۲k-۱}}{\lambda_{۲k-۳}} \cdots \frac{\lambda_۳}{\lambda_۱} = \frac{۲\pi}{۲k+۱} \cdot \frac{۲\pi}{۲k-۱} \cdot \frac{۲\pi}{۲k-۳} \cdots \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲^{۲k} \pi^k k!}{(۲k+۱)!} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{۲k+۱} = \frac{۲^{۲k+۱} \pi^k k!}{(۲k+۱)!}$$

بنابراین فرمول به دست آوردن حجم درجه‌ی n یک گوی n بعدی عبارت است از:

$$V_n(R) = \lambda_n R^n \quad , \quad \lambda_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{n}{۲}}}{\frac{n}{۲}!} & ; \ n = ۲k \\ \dfrac{۲^n \pi^{\frac{n-۱}{۲}} \frac{n-۱}{۲}!}{n!} & ; \ n = ۲k+۱ \end{cases}$$

همان گونه که دیده می‌شود حجم گوی n بعدی بسته به زوج یا فرد بودن n از از دو رابطه‌ی مختلف به دست می‌آید. در واقع فرمول ارائه شده برای به دست آمدن حجم گوی بر حسب تعداد ابعاد آن فرمولی دوضابطه‌ای است. در اینجا ما می‌خواهیم این دو ضابطه را به یک ضابطه تبدیل کنیم. با به‌کارگیری توابعی چون جزء صحیح، خارج قسمت و یا باقیمانده می‌توان یک تابع طولانی یک ضابطه‌ای را جایگزین این تابع دوضابطه‌ای کرد:

$$\lambda_n = (n-۱) \bmod ۲ \times \pi^k/_{k!} + n \bmod ۲ * (۲^{۲k+۱}\pi^k k!)/(۲k+۱)!$$

اما بر سر این راه دو مشکل وجود دارد. نخست آنکه یک ضابطه کردن این فرمول با این روش نه تنها فرمول کوچکتر و بهتری را در اختیار ما نمی‌گذارد، بلکه فرمولی طولانی‌تر و پیچیده‌تر از فرمول قبل را پدید می‌آورد. دوم آنکه با یکی شدن این دو ضابطه به روش مذکور عبارتی به دست می‌آید که به صورت مجموع دو عبارت دیگر است به گونه‌ای که عبارت نخست برای مقادیر فرد n و عبارت دوم هم برای مقادیر زوج n تعریف نشده می‌باشد و به طور کلی عبارت داده شده برای هیچ مقدار n تعریف شده نخواهد بود و البته قصد ما هم قطعاً چنین چیزی نیست. اما برای یکی کردن این دو ضابطه می‌توان روش دیگری را هم به کار گرفت. برای معرفی این شیوه نخست باید با تابعی متعالی (غیر جبری) به نام تابع گاما که در ریاضیات پیشرفته به کار می‌رود آشنا باشید. این تابع نخستین بار از یک انتگرال نامعین موسوم به *انتگرال نوع دوم اویلر* به دست آمد و پس از آن ثابت شد که تابع گاما تعمیمی است از فاکتوریل برای تمامی اعداد حقیقی. در اینجا تنها به معرفی رابطه‌ی تابع گاما با فاکتوریل بسنده می‌کنیم:

$$\forall\ n \in IN : \ \Gamma(n+۱) = n!$$

چنان که از فرمول بالا نتیجه می‌شود، تابع گاما تابعی است که به ازای اعداد طبیعی فاکتوریل یک واحد کمترشان را برمی‌گرداند و برای سایر اعداد حقیقی تعمیمی است از فاکتوریل. با به-کارگیری این تابع شما می‌توانید معادل فاکتوریل را برای اعدادی چون π و ۱/۵ محاسبه کنید. اکنون ما می توانیم صورت فرمول حجم گوی n بعدی را به جای فاکتوریل با تابع گاما بنویسیم:

$$V_n(R)=\lambda_n R^n \quad , \quad \lambda_n=\begin{cases} \dfrac{\pi^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲}+۱)} & ; \ n=۲k \\[2ex] \dfrac{۲^n \pi^{\frac{n-۱}{۲}}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\Gamma(n+۱)} & ; \ n=۲k+۱ \end{cases}$$

اکنون می خواهیم دو ضابطه ی فرمول بالا را به یک ضابطه تبدیل کنیم. برای این کار فرمول زیر را به کار می گیریم:

$$\Gamma(x)=\Gamma(\frac{x+۱}{۲})\Gamma(\frac{x}{۲})\frac{۲^{x-۱}}{\sqrt{\pi}} \quad , \quad x\neq ۰,-۱,-۲,-۳,\ldots$$

فرمول بالا برای تمامی مقادیر x به جز x های صحیح و نامثبت برقرار است. اکنون با تعویض متغیر x=n+۱ فرمولی به دست می‌آید که تمامی مقادیر n به جز n های صحیح منفی در آن صدق می‌کنند:

$$\Gamma(n+۱)=\Gamma(\frac{n}{۲})\Gamma(\frac{n+۱}{۲})\frac{۲^n}{\sqrt{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(n+۱)\pi^{\frac{n}{۲}}=\Gamma(\frac{n}{۲}+۱)\Gamma(\frac{n+۱}{۲})\,۲^n\pi^{\frac{n-۱}{۲}}$$

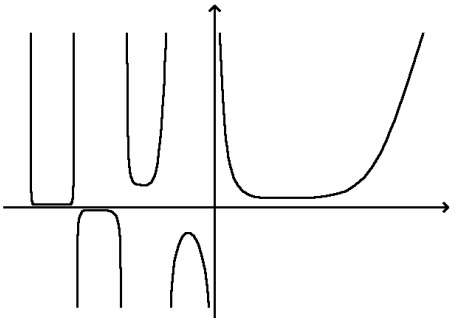
اکنون اگر طرفین برابری را بر $\Gamma(n+۱).\Gamma(^n/_۲+۱)$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{\pi^{\frac{n}{۲}}}{\Gamma(\frac{n}{۲}+۱)}=\frac{۲^n\pi^{\frac{n-۱}{۲}}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\Gamma(n+۱)} \quad ; \quad n\neq -۱,-۲,-۳,\ldots$$

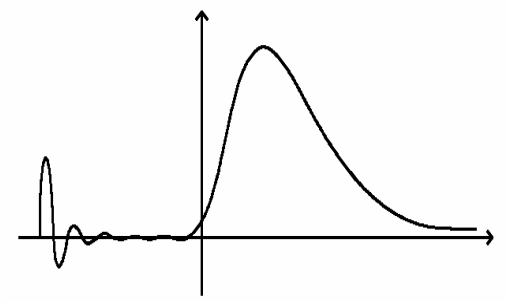
یعنی دو ضابطه‌ی به دست آمده برای حجم گوی n بعدی در واقع یکی هستند و نه تنها برای مقادیر طبیعی n بلکه برای کلیه‌ی مقادیر حقیقی آن با هم برابر می باشند. بدین ترتیب اگر به جای اندیس n متغیر x را قرار دهیم، برای محاسبه‌ی $\lambda(x)$ می‌توان هر کدام از دو ضابطه را به تنهایی به کار برد:

$$V_x(R)=\lambda(x)R^x \quad , \quad \lambda(x)=\frac{\pi^{\frac{x}{۲}}}{\Gamma(\frac{x}{۲}+۱)} \quad , \quad x\neq -۱,-۲,-۳,\ldots$$

فرمول بالا این امکان را فراهم می سازد که حجم گوی را حتا در فضاهایی با ابعاد ناصحیح محاسبه کنیم. در شکل زیر نمودار تابع گاما $\Gamma(x)$ و نیز تابع $\lambda(x)$ (ضریب حجم گوی n بعدی) رسم شده اند:



y=λ(x)



y=Γ(x)

اکنون هنگام محاسبه‌ی سطح جانبی یک کره‌ی n بعدی است:

قضیه: سطح جانبی گوی چندبعدی برابر با مشتق حجم آن نسبت به شعاعش می‌باشد. (نرخ تغییرات حجم یک گوی چندبعدی نسبت به شعاع آن برابر است با سطح جانبی آن گوی.)

برهان: برای اثبات این قضیه دست کم دو راه وجود دارد:

روش نخست: دو گوی n بعدی هم‌مرکز با شعاع‌های R و R+ε را در نظر می‌گیریم. این دو گوی جداری به قطر در ε پدید می‌آورند. اکنون در حالتی که ε کم می‌شود، حجم جداره به

حاصل‌ضرب ε سطح جانبی هر یک از دو گوی نزدیک می‌شود[1] ، به گونه‌ای که اگر $V_n(R)$ و $S_n(R)$ توابعی برای یافتن حجم و سطح جانبی یک گوی با شعاع R باشند، حد زیر را داریم:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V_n(R+\varepsilon) - V_n(R)}{\varepsilon} = S_n(R)$$

طرف نخست این تساوی بر اساس تعریف، مشتق تابع $V_n(R)$ نسبت به R می‌باشد، بنابراین حکم ثابت است:

$$V_n'(R) = \frac{d V_n(R)}{d R} = S_n(R)$$

روش دوم: برای به‌کارگیری این روش باید فرمول حجم مخروط n بعدی را که در همین فصل ثابت خواهد شد مورد استفاده قرار دهیم. از آنجا که در به دست آوردن حجم مخروط هرگز از سطح جانبی گوی و یا نتایج آن استفاده نشده‌است، ما هم دقیقاً همین کار را می‌کنیم! اینک سطح گوی را به بی‌شمار قطعه‌ی بسیار کوچک افراز می‌کنیم. با توجه به ابعاد این قطعات انحنایشان بسیار ناچیز است، بنابراین اگر نقاط پیرامون آنها را به مرکز گوی وصل کنیم، هرم‌هایی پدید می‌آیند که هر یک از این قطعات سطح جانبی گوی، نقش قاعده‌ی آنها را بازی می‌کنند[2] و نیز به علت کوچکی این قاعده‌ها ارتفاع این هرم‌ها برابر با شعاع گوی خواهد بود. اینک همانگونه که سطح گوی به قطعات بیشماری با سطح ناچیز افراز شد، حجم آن هم به هرم‌های

---

[1] برای درک بهتر این پدیده فرض کنید که در حالتی که جداره بسیار نازک است، می‌توان آن را بدون تغییر حجم و سطح مانند پوست پرتقال له شده به صورت تخت در آورد. در این حالت حجم ورقه‌ی به دست آمده برابر با حاصل‌ضرب قطر آن در مساحت قاعده‌اش خواهد بود. چنانکه دیده می‌شود، درک شهودی این نکته برای فضاهای دوبعدی و سه‌بعدی بسیار آسان است، اما شکستن آن از نظر عقلی به اصول و قضایای گفته شده و شناخته‌شده در سطح این کتاب نیست.

[2] پرسشی که در اینجا به ذهن می‌رسد این است که هنگامی که تعداد افرازهای سطح گوی زیاد می‌شود و نیز ابعاد زیر مجموعه‌های سطح گوی به صفر میل می‌کند، چرا ما حق داریم سطح این قطعات را تقریباً تخت فرض کنیم و آنها را به عنوان قاعده‌های قابل قبول هرم‌هایمان به کار گیریم. در این کتاب به این پرسش پاسخ قانع کننده ای داده نشده است.

باریکی افراز می‌گردد، به گونه‌ای که حجم گوی برابر با مجموع حجم این هرم‌ها خواهد بود:

$$V_n(R) = \int dv = \int \frac{h}{n} ds = \int \frac{R}{n} ds = \frac{R}{n} \int ds = \frac{R}{n} S_n(R)$$

اکنون با توجه به اینکه حجم هر گوی n بعدی با توان n ام شعاع آن متناسب است، به جای $V_n(R)$ مقدارش را برحسب R قرار می‌دهیم:

$$V_n(R) = \lambda_n R^n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n R^n = \frac{R}{n} S_n(R) \quad \Rightarrow \quad S_n(R) = n \lambda_n R^{n-1} = V_n'(R)$$

بدین ترتیب با دو روش گوناگون ثابت می‌شود که سطح جانبی یک گوی چندبعدی برابر با مشتق حجم آن نسبت به شعاعش است. با اندکی دقت می‌توان مصداق‌هایی از این حکم را در هندسه یافت. اگر از مساحت دایره ($\pi.R^2$) نسبت به R مشتق بگیریم محیط دایره ($2\pi R$) به دست می‌آید و نیز اگر تغییرات حجم گوی ($\frac{4}{3}\pi R^3$) را نسبت به شعاع آن (R) بررسی نماییم مساحت جانبی گوی ($4\pi^2 R$) به دست می‌آید. نیز با این روش می‌توان پیش‌بینی کرد که سطح جانبی گوی چهاربعدی از رابطه‌ی ($S = 2\pi^2 R^3$) محاسبه می‌شود.

استوانه

استوانه‌ی n بعدی، منشور n بعدی قائمی است که قاعده‌های آن گوی‌های n-۱ بعدی می‌باشند.

همان گونه که فصل مشترک‌های یک منشور n بعدی با فضاهای n-۱ بعدی موازی با دو قاعده‌ی آن همواره اشکال n-۱ بعدی برابری هستند، فصل مشترک‌های یک استوانه‌ی n بعدی با فضاهای n-۱ بعدی موازی با قاعده‌هایش یک گوی n-۱ بعدی مانند قاعده می‌باشند. گفتنی است که استوانه‌ی n بعدی مانند هر منشور n بعدی شکلی n بعدی است.

قضیه: حجم درجه‌ی n یک استوانه‌ی n بعدی با ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R از رابطه‌ی به دست می‌آید:

$$\mathbf{V = \lambda_{n-1} . h . R_{n-1}}$$

برهان: بنا بر تعریف حجم ، حجم درجه‌ی n هر منشور n بعدی برابر است با حجم درجه‌ی n-۱ قاعده ضرب در ارتفاع منشور. بنابراین حجم درجه‌ی n یک استوانه برابر با ارتفاع استوانه ضرب در حجم درجه‌ی n-۱ هر یک از دو قاعده می‌باشد.

همان طور که از قضیه‌ی قبل به دست می‌آید، حجم درجه‌ی n-۱ هر یک از گوی‌های n-۱ بعدی قاعده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V_{n-1}(R) = \lambda_{n-1} . R^{n-1}$$

اگر ارتفاع استوانه h باشد، حجم آن (V) برابر با حاصل ضرب ارتفاع آن (h) در حجم کره ($V_{n-1}(R)$) خواهد بود و حکم ثابت است:

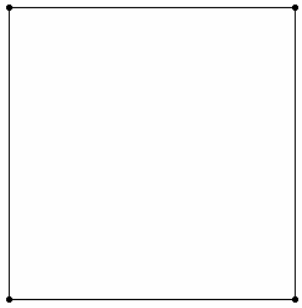
$$V = \lambda_{n-1} . h . R_{n-1}$$

جعبه

جعبه‌ی n بعدی، منشور n بعدی قائمی است که قاعده‌های آن جعبه‌های n-۱ بعدی هستند. چنان که پیش‌تر هم گفته شد، جعبه‌ی صفربعدی یک نقطه است و استثنائاً برای ساختن جعبه‌ی تک‌بعدی از جعبه‌ی صفر بعدی لازم نیست که امتداد مولد بر نقطه عمود باشد، زیرا عمود بودن خط بر نقطه معنا ندارد. توجه داشته باشید که جعبه‌ی n بعدی مانند هر منشور دیگر یک شکل n بعدی است.

شاید تا کنون در یافته باشید که جعبه تعمیم‌یافته‌ی مستطیل و مکعب مستطیل است و از این رو این نام برایش برگزیده شده است.

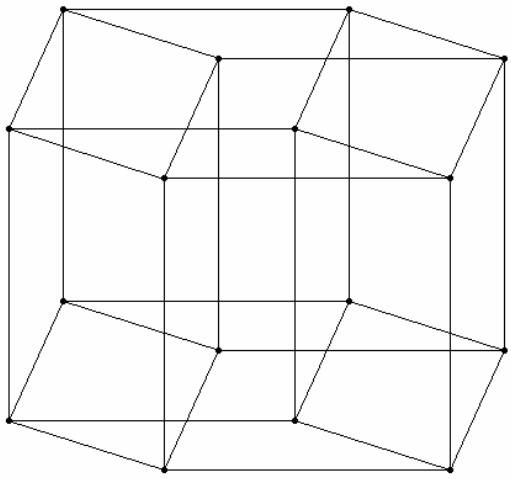
در شکل صفحه‌ی بعد چگونگی ساخته‌شدن یک جعبه‌ی را از جعبه‌های قاعده‌اش (که یک بعد کمتر دارند) می‌بینید:



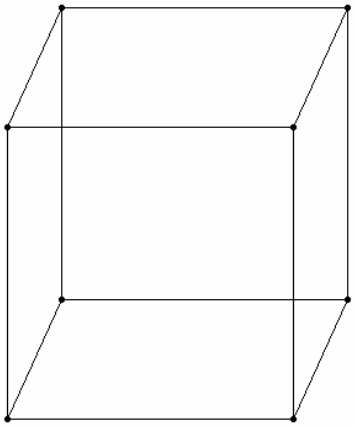
مربع (نوعی جعبه‌ی دوبعدی)

پاره‌خط (جعبه‌ی تک‌بعدی)

نقطه (جعبه‌ی صفربعدی)



جعبه‌ی چهاربعدی



مکعب مستطیل (جعبه‌ی سه‌بعدی)

فراموش نکنید که اشکالی که در بالا رسم شده‌اند تنها تصویری از این جعبه‌ها هستند و نه خود آنها. جعبه‌ی صفر بعدی دقیقاً یک نقطه است و با چشم دیده نمی‌شود. همچنین یک خط (جعبه‌ی تک‌بعدی) و نیز یال‌های مربع (جعبه‌ی دوبعدی) از نظر هندسی بدون ضخامت هستند. جعبه‌های سه‌بعدی و بیش از آن هم در یک صفحه نمی‌گنجند و آنچه در بالا به چشم می‌خورد تنها تصویری است از این اشکال نامسطح روی یک صفحه‌ی دوبعدی، مانند عکسی که از زاویه‌ای دلخواه از آنها گرفته شود.

زیرجعبه: هر جعبه‌ی n بعدی از جعبه‌های صفر تا n بعدی تشکیل شده است که آنها را زیرجعبه می‌نامیم. رأس‌های یک زیرجعبه باید از رأس‌های جعبه‌ی مفروض و یال‌های آن آن (در

صورت وجود) باید از یال‌های جعبه‌ی نخست باشند. این زیرجعبه‌ها که اجزای سازنده‌ی یک جعبه هستند، در واقع همان رأس‌ها، یال‌ها، وجه‌ها و ... هستند. به بیانی دیگر زیرجعبه‌های صفربعدی رؤوس جعبه و زیرجعبه‌های تک‌بعدی هم یال‌های جعبه (پاره‌خط‌های پیوند دهنده‌ی رؤوس) متناظر هستند. در حالت خاصی که جعبه‌ی مفروض یک مکعب باشد، این اجزای سازنده *زیرمکعب* نامیده می‌شوند. از سوی دیگر چون اضلاع یک مکعب همان یال‌های آن هستند، پس طول ضلع هر زیرمکعب با طول ضلع خود مکعب برابر است.

ویژگی‌های جعبه: هر جعبه دارای ویژگی‌های زیر است. این ویژگی‌ها با تعریفی که از جعبه ارائه دادیم نیز ثابت می‌شوند، ولی بسیار آسان‌تر است که برای اثبات آنها از تعاریف دیگری که در این کتاب نیامده‌اند (تعاریف غیر بازگشتی و یا توپولوژیک) استفاده نماییم. بنابراین در اینجا از اثبات این قضایا خودداری کرده و به ذکر صورت آنها بسنده می‌کنیم:

۱- هنگام ساختن یک جعبه‌ی n بعدی از یک جعبه‌ی n-۱ بعدی، هر رأس یک قاعده به‌وسیله‌ی مولد سطح منشوری قائم به رأس متناظرش در قاعده‌ی دیگر وصل می‌شود.

۲- هر زیرجعبه‌ی k-۱ بعدی از قاعده‌ی یک جعبه‌ی n بعدی با زیرجعبه‌ی متناظرش در قاعده‌ی رو به رو تشکیل یک زیرجعبه‌ی k بعدی می‌دهند.

۳- هر جعبه‌ی n بعدی دارای ۲n رأس است.

٤- از هر رأس یک جعبه‌ی n بعدی n یال می‌گذرد که دو به دو عمود بر هم هستند.

۵- با k یال همرس دو به دو عمود بر هم از یالهای یک جعبه‌ی n بعدی می‌توان یک جعبه‌ی k بعدی ساخت به گونه‌ای که رأس‌ها و یال‌های دیگر آن جعبه‌ی k بعدی نیز درون جعبه‌ی n بعدی یاد شده قرار گیرد و به بیانی دیگر این جعبه‌ی k بعدی زیرجعبه‌ی آن جعبه‌ی n بعدی باشد.

چون دو قاعده‌ی هر منشور با هم موازی هستند، بنابراین پاره‌خط‌های محصور به این دو قاعده که با امتداد Δ موازی هستند، هم طول می‌باشند. همچنین Δ و ارتفاع جعبه هر دو بر قاعده‌ها عمود هستند، پس طول همه‌ی پاره‌خط‌های محصور بین دو قاعده برابر با ارتفاع جعبه است. از گفته‌های بالا نتیجه می‌شود که پاره‌خط‌هایی که واصل بین دو رأس متناظر قاعده‌ها

هستند (اضلاع) هم طول ارتفاع‌ها هستند. از سوی دیگر تنها جعبه‌ی تک‌بعدی است که قاعده‌اش مشخص می‌باشد و برای جعبه‌هایی با ابعاد بیشتر خود قاعده‌ها هم به نوبه‌ی خود دارای ارتفاع و قاعده می‌باشند. بنابراین هر جعبه n بعدی با n عامل مشخص می‌گردد و آنها عبارت‌اند از طول ارتفاع، طول ارتفاع قاعده، طول ارتفاع قاعده‌ی قاعده و ... ، اینها به بیانی دیگر همان طول اضلاع جعبه n بعدی‌اند که آنها را با a_i نشان می‌دهیم. برای نمونه یک مربع را با چشم‌پوشی از مکان قرار گرفتن‌اش در فضا با دو عامل می‌توان تعیین کرد طول ($a_۱$) و عرض ($a_۲$). اینک رابطه‌ای را برای حجم جعبه‌ی n بعدی به دست می‌آوریم:

قضیه: حجم درجه‌ی n جعبه‌ی n بعدی برابر است با حاصل‌ضرب طول اضلاع آن.

برهان: بنا بر تعریف حجم ، حجم درجه‌ی n هر منشور n بعدی برابر است با حجم درجه‌ی n−۱ قاعده ضرب در ارتفاع منشور. پس حجم درجه‌ی n یک جعبه برابر است با ارتفاع استوانه ضرب در حجم درجه‌ی n−۱ هر یک از دو قاعده. این در حالی است که هر یک از دو قاعده جعبه‌هایی با یک بعد کمتر هستند. از طرفی حجم درجه‌ی یک هر جعبه تک‌بعدی-که همان پاره‌خط است-برابر است با طول آن پاره‌خط. بنابراین در مورد حجم یک جعبه با طول اضلاع a_i روابط زیر برقرار است:

$$V_۱(a_i)=a_i$$

$$Vn(a_۱,a_۲,a_۳,...,a_n) = h.V_{n-۱}(a_۱,a_۲,a_۳,...,a_{n-۱}) = a_n.V_{n-۱}\ (a_۱,a_۲,a_۳,...,a_n)$$

پس حجم درجه‌ی n یک جعبه‌ی n بعدی به اضلاع a_i برابر است با:

$$Vn(a_۱,a_۲,a_۳,...,a_n) = a_۱.a_۲.a_۳...a_{n-۱}$$

قضیه: هر جعبه‌ی n بعدی دارای $۲^{n-k}\binom{n}{k}$ زیرجعبه‌ی k بعدی است.

برهان: در آغاز فرض می‌کنیم که یک جعبه‌ی n بعدی دارای Cube(k, n) زیرجعبه‌ی n بعدی باشد. می‌دانیم که هر جعبه‌ی n بعدی منشوری قائم با قاعده‌های جعبه‌های n−۱ بعدی

است. هر یک از دو قاعده‌ی n−۱ بعدی این جعبه‌ی n بعدی دارای Cube(k, n−۱) زیرجعبه‌ی k بعدی است و روشن است که این تعداد، زیرجعبه‌های جعبه‌ی n بعدی نیز می‌باشند. افزون بر اینها هر یک از Cube(k−۱, n−۱) زیرجعبه‌ی k−۱ بعدی قاعده با زیرجعبه‌ی متناظرش در قاعده‌ی دیگر تشکیل یک زیرجعبه‌ی k بعدی می‌دهند. از سوی دیگر هر زیرجعبه‌ی k بعدی که در این جعبه‌ی n بعدی باشد، یا تمام رأس‌هایش روی یک قاعده است و یا برخی از آنها در یک قاعده و بقیه در قاعده‌ی دیگر قرار دارند. در هر دو صورت این زیرجعبه از زیرجعبه‌هایی است که در بالا آنها را شمارش کردیم. بنابراین تعداد زیرجعبه‌های k بعدی یک جعبه‌ی n بعدی برابر است با:

$$\text{Cube}(k, n) = ۲\ \text{Cube}(k, n-۱) + \text{Cube}(k-۱ ، n-۱)$$

اینک با به‌کارگیری استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم:

می‌دانیم که هر جعبه‌ی صفربعدی (نقطه) دقیقاً یک زیرجعبه‌ی صفربعدی دارد، پس حکم برای n=۰ برقرار است و مقدمه‌ی استقرا برقرار است:

$$\text{Cube}\ (۰\ ,\ ۰) = \binom{۰}{۰}\ ۲^{۰-۰}$$

اکنون ثابت می کنیم که اگر حکم برای n و هر k به طوری که (۰≤k≤n)برقرار باشد (P(n))، برای n+۱ و هر ۰≤k≤n+۱ نیز برقرار است ((P(n+۱). اما اگر از فرمول بازگشتی یادشده برای اثبات فرمول استفاده کنیم، گزاره‌ی P(n) تنها برای ۱≤k≤n برقرار خواهد بود. پس باید درستی P(n) را برای مقادیر ۱−≤k≤n+۱ بپذیریم، یعنی علاوه بر فرض استقرا باید درستی حکم را برای مقادیر k=n+۱ و k=۰ ثابت کنیم.

بر اساس اصل نهم در یک جعبه‌ی n+۱ بعدی هیچ جعبه‌ی ۱− بعدی وجود ندارد:

$$\text{Cube}(-۱, n) = ۰$$

علاوه بر این هیچ زیر جعبه‌ی n+۱ بعدی نیز در یک جعبه‌ی n بعدی وجود ندارد، زیرا در غیر این صورت آن جعبه‌ی n+۱ بعدی درون فضای حامل جعبه‌ی n بعدی قرار می‌گیرد و این

امکان ندارد زیرا جعبه‌ی n+۱ بعدی در واقع یک شکل n+۱ بعدی است و بنا بر تعریف در یک فضای n بعدی نمی‌گنجد:

$$Cube(n, n+۱) = ۰$$

اکنون با توجه به اینکه فرض استقرا برای n و ۱-≤k≤n+۱ برقرار است، حکم را ثابت می-کنیم.

$$Cube(k, n+۱) = ۲Cube(k, n)+Cube(k-۱, n)$$

$$Cube(k,n) = ۲\binom{n}{k}۲^{n-k} + \binom{n}{k-۱}۲^{n-(k+۱)} = ۲^{n+۱-k}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱}\right) = ۲^{n+۱-k}\binom{n+۱}{k}$$

با استدلال بالا حکم در مورد n+۱ و برای مقادیر ۰≤k≤n ثابت می‌شود. بنابراین P(n+۱) برقرار است.

این قضیه به جز اثبات بازگشتی که در اینجا ارائه شد، راه حل های دیگری دارد که بر اساس ویژگی‌های یک جعبه استوار اند. در اینجا یک نمونه از آنها را ذکر می کنیم. همانگونه که گفته شد، از هر رأس یک جعبه‌ی n بعدی n یال دو به دو عمود بر هم می‌گذرد و با هر k یال دو به دو عمود بر هم می توان یک جعبه ی n بعدی ساخت که رؤوس و یال هایش بر رؤوس و یال‌های جعبه‌ی n بعدی نخست قرار داشته باشد. بنابراین به ازای هر رأس $\binom{n}{k}$ زیرجعبه ساخته می‌شود. چون تعداد رؤوس یک جعبه‌ی n بعدی ۲^n است، پس در کل $\binom{n}{k}۲^n$ زیرجعبه ساخته می‌شود. اما اگر دقت کنیم، می‌بینیم که هر زیرجعبه به تعداد رؤوس‌اش شمارده شده است. یعنی هر زیرجعبه به تعداد رؤوس‌اش شمارده شده است. یعنی هر زیرجعبه ۲^k بار به حساب آمده است. یعنی تعداد درست زیرجعبه‌ها $\binom{n}{k}\frac{۲^n}{۲^k}$ می‌باشد

$$≤k≤n \Rightarrow Cube(k, n) = \binom{n}{k}۲^{n-k}$$

مثلث تعداد زیرجعبه‌ها: اگر به شباهت رابطه‌ی بازگشتی تعداد زیرجعبه‌های k بعدی یک جعبه‌ی n بعدی و رابطه‌ی بازگشتی ترکیب در آنالیز دقت کنید، می‌بینید که می‌توان مثلثی مانند مثلث خیام-پاسکال را برای محاسبه‌ی تعداد زیرجعبه‌های یک جعبه‌ی چندبعدی رسم نمود. در

مثلث خیام-پاسکال هر عدد از مجموع دو عدد بالاترش به دست می‌آید، ولی در این مثلث هر عدد برابر است با عدد بالاترِ سمت راست به اضافه‌ی دو برابر عدد بالاترِ سمت چپ. گفتنی است همان‌گونه‌که $\binom{n}{k}$ جمله‌ی عمومی بسط دوجمله‌ای $(۱+۱)^n$ است، عبارت $Cube(k,n)=\binom{n}{k}\ ۲^{n-k}$ همان جمله‌ی k+۱ ام بسط دوجمله‌ای $(۲+۱)^n$ می‌باشد. با این حساب مثلثی به دست می‌آید که اعداد آن بر خلاف مثلث خیام-پاسکال ضرایب بسط $(۱+۱)^n$ نیستند، بلکه ضرایب بسط $(۲+۱)^n$ می‌باشند.

نتیجه‌ی دیگری که از این مثلث اعداد گرفته می‌شود این است که تعداد تمامی زیرجعبه‌های یک جعبه‌ی n بعدی برابر با تعداد زیرجعبه‌های صفربعدی تا n بعدی و در نتیجه برابر با بسط دوجمله‌ای $(۲+۱)^n$ است. پس فرمول زیر را می‌توان برای به دست آوردن تعداد کل زیرجعبه‌های یک جعبه‌ی n بعدی نوشت:

$$\sum_{i=۰}^{n} Cube(k,n)=\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{k}\ ۲^{n-k}=(۲+۱)^n=۳^n$$

در زیر با استفاده از قانون بازگشتی مذکور، مثلث تعداد زیرجعبه‌ها رسم شده است. در این مثلث عدد k ام از سطر n ام نشان‌دهنده‌ی تعداد زیرجعبه‌های k-۱ بعدی یک جعبه‌ی n-۱ بعدی است. برای نمونه دومین عدد سطر سوم تعداد یال‌های یک مربع است که برابر با (٤) می‌باشد. همچنین از سطر هفتم پیدا است که یک جعبه‌ی شش‌بعدی دارای ٦٤ رأس، ۱۹۲ یال، ۲٤۰ وجه و ... است. همان‌طور که دیده می‌شود، مجموع اعداد در سطر اول ($۳^۰$=۱)، در سطر دوم ($۳^۱$=۳)، در سطر سوم ($۳^۲$=۹)، در سطر چهارم ($۳^۳$=۲۷) و ... می‌باشد.

۱

۲ ۱

٤ ٤ ۱

۸ ۱۲ ٦ ۱

۱٦ ۳۲ ۲٤ ۸ ۱

۳۲ ۸۰ ۸۰ ٤۰ ۱۰ ۱

٦٤ ۱۹۲ ۲٤۰ ۱٦۰ ٦۰ ۱۲ ۱

. . . . . .

مکعب

هر مکعب n بعدی یک جعبه‌ی n بعدی است که قاعده‌ی آن مکعب n-۱ بعدی بوده و طول ارتفاع آن نیز برابر با طول ارتفاع مکعب n-۱ بعدی قاعده‌اش است. بنابراین اضلاع مکعب n بعدی با هم برابر هستند و یک مکعب تنها با یک عامل (a) مشخص می‌شود و حجم آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V_n(a)=a^n$$

شایان ذکر است که چون هر مکعب n بعدی نوعی جعبه‌ی n بعدی است، پس گزاره‌هایی که برای محاسبه‌ی تعداد زیرجعبه‌ها ثابت کردیم، برای محاسبه‌ی تعداد زیرمکعب‌های یک مکعب n بعدی نیز برقرارند. در واقع تفاوت جعبه با مکعب تنها در گوناگونی طول اضلاع (یال‌ها) است و این دو از نظر تعداد اجزای تشکیل دهنده و ارتباط بین آنها هیچ تفاوتی ندارند.

متوازی‌السطوح

اگر متوازی‌السطوح صفربعدی را یک نقطه در نظر بگیریم، متوازی‌السطوح n بعدی منشور n بعدی است که قاعده‌های آن متوازی‌السطوح‌های n-۱ بعدی باشند. گفتنی است که یک متوازی‌السطوح n بعدی مانند هر منشور n بعدی، یک شکل n بعدی است. همان گونه که می‌بینید، این تعریف همانند تعریف جعبه n بعدی است، با این تفاوت که در مورد جعبه منشور قائم به کار می‌رود، ولی منشور تشکیل‌دهنده‌ی متوازی‌السطوح می‌تواند مایل هم باشد. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که مکعب و جعبه‌ی n بعدی حالت ویژه‌ای از متوازی‌السطوح n بعدی است که در آن زاویه‌ی بین اضلاع راست (قائمه) است.

گفتیم که مکعب و جعبه تنها از نظر طول اضلاع متفاوت‌اند و تعداد رؤوس، یال‌ها، وجوه و به طور کلی زیرجعبه‌های آنها با هم برابر است. حال می‌گوییم که این شباهت بین یک متوازی‌السطوح و یک جعبه‌ی هم‌بُعد نیز برقرار است. به بیانی دیگر این دو شکل از نظر توپولوژی هم ارزند و تنها در زوایا اختلاف دارند. بنابراین همه‌ی فرمول‌ها و گزاره‌هایی که درباره‌ی وضعیت قاعده‌ها و تعداد اجزای تشکیل‌دهنده‌ی یک جعبه‌ی n بعدی (رأس و یال و

وجه و ...) و روابط آنها گفتیم، برای یک هر متوازی السطوح n بعدی نیز برقرار است. اکنون که با متوازی‌السطوح تا اندازه‌ای آشنا شدیم، بررسی آن را موقتاً به پایان می‌بریم تا در فصل بعد کمیت‌هایی چون زوایا و حجم آن را محاسبه نماییم.

هرم

سطح هرمی چند بعدی: اگر همه‌ی نقاط روی یک شکل بسته‌ی n−۱ بعدی را به یک نقطه مانند A بیرون از فضای حامل آن شکل وصل کرده و امتداد دهیم، شکل به دست آمده یک سطح هرمی n بعدی است.اینک به نقطه‌ی A *رأس هرم* ، به شکل بسته‌ی n−۱ بعدی مذکور *قاعده‌ی سطح هرمی* و به هر خط واصل بین رأس و قاعده *یال هرم* گفته می‌شود.

هرم کامل چندبعدی: هرم n بعدی کامل شکلی است که بین سطح هرمی n بعدی و قاعده محدود باشد.

هرم ناقص چندبعدی: هرم n بعدی ناقص شکلی است که بین سطح هرمی n بعدی ، قاعده و فضایی n−۱ بعدی موازی با قاعده، جدا از قاعده و درون فضای حامل سطح هرمی محدود باشد. هرم ناقص دو قاعده دارد که یکی از آنها قاعده‌ی سطح هرمی (قاعده‌ی بزرگ) و دیگری فصل مشترک سطح هرمی با فضای n−۱ بعدی موازی قاعده‌ی بزرگ (قاعده‌ی کوچک) می‌باشد. بنابراین دو قاعده‌ی هرم ناقص با هم موازی‌اند.

در صفحه‌ی بعد ثابت می‌شود که سطح هرمی n بعدی و در نتیجه‌ی آن هرم n بعدی یک شکل n بعدی است، زیرا زیرمجموعه‌ای از سطح هرمی بوده و در فضای حامل n بعدی آن می‌گنجند. از طرفی در یک فضای n−۱ بعدی نمی‌گنجند، زیرا اگر بگنجند آن فضا همان قاعده‌ی هرم است و کل هرم در قاعده‌اش جای می‌گیرد و این ممکن نیست، چون در هرم کامل رأس از قاعده جدا است و در هرم ناقص هم دو قاعده جدا از هم‌اند.

قضیه: هرم n بعدی یک شکل n بعدی است.

برهان: در آغاز فرض می‌کنیم که یک هرم n بعدی در یک فضای n−۱ بعدی مانند S_{n-1} جای بگیرد. اینک S_{n-1} قاعده‌ی هرم را دربرگرفته و فضای حامل آن می‌شود، یعنی فضای حامل

قاعده (S_{n-1}) شامل رأس هرم می‌باشد و این غیرممکن است. اکنون ثابت می‌کنیم که یک هرم n بعدی حتماً در یک فضای n بعدی مانند S_n می‌گنجد. یعنی می‌گوییم که فضای حامل قاعده و رأس هرم یک و تنها یک فضای n بعدی را مشخص می‌کنند. اکنون از هر یال هرم دو نقطه‌ی متمایز (رأس هرم و نقطه‌ای از روی قاعده) در S_n قرار دارد. بنابراین تمامی یال‌های هرم و درنتیجه خود آن در این فضای n بعدی قرار دارند. درنتیجه بنا بر تعریف شکل هرم n بعدی یک شکل n بعدی است، زیرا در فضای n بعدی می‌گنجد، ولی در هیچ فضای n-۱ جای نمی‌گیرد.

اکنون انتظار می‌رود که همانند سایر اشکال هندسی چندبعدی به محاسبه‌ی فضای اشغال شده توسط هرم بپردازیم. اما هنوز برای این کار زود است چرا که برای به دست آوردن حجم هرم نیاز به دانستن حجم مخروط است، بنابراین نخست مخروط را تعریف کرده و قضایایش را ثابت می‌کنیم. سپس قضایای مربوط به هرم را بررسی می‌نماییم:

مخروط

سطح مخروطی چندبعدی: سطح مخروطی n بعدی هرمی n بعدی است که قاعده‌ی آن یک گوی n-۱ بعدی بوده و اگر از رأس آن عمودی بر قاعده وارد کنیم، این عمود از مرکز گوی n-۱ بعدی قاعده بگذرد. در مورد مخروط به جای یال هرم واژه‌ی *مولد مخروط* را به کار می‌برند.

مخروط کامل چندبعدی: مخروط n بعدی کامل شکلی است که بین سطح مخروطی n بعدی و قاعده محدود باشد. بنابراین هر مخروط کامل یک هرم کامل است.

مخروط ناقص چندبعدی: مخروط n بعدی ناقص شکلی است که بین سطح مخروطی n بعدی، قاعده و فضایی n-۱ بعدی موازی با قاعده، جدا از قاعده و درون فضای حامل سطح مخروطی محدود باشد. هر مخروط ناقص نیز یک هرم ناقص است و دو قاعده دارد که از قضیه‌ی بعد نتیجه می‌شود که این دو قاعده‌ی مخروط ناقص دو گوی هستند. فاصله‌ی این دو قاعده را *ارتفاع مخروط ناقص* می‌نامیم. اینک اگر فاصله‌ی رأس سطح مخروطی از دو قاعده‌ی بزرگ و کوچک مخروط ناقص را h و h′ بنامیم، ارتفاع مخروط ناقص h-h′ خواهد بود. نیز اگر شعاع این دو قاعده را به ترتیب R و R′ بنامیم، بر اساس قضیه‌ی بعد رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$R/h = R'/h' = (R-R')/(h-h')$$

سطح مخروطی، مخروط کامل و مخروط ناقص n بعدی چون انواعی از هرم هستند، پس اشکالی n بعدی می‌باشند. شایان ذکر است که یک مخروط کامل نوعی مخروط ناقص است که شعاع یکی از قاعده‌های آن صفر است.

قضیه: فصل مشترک یک مخروط n بعدی کامل با یک فضای n−۱ بعدی که بر فضای حامل آن مخروط واقع است، با قاعده موازی است و آن مخروط را قطع می‌کند، یک گوی n−۱ بعدی است.

برهان: مخروطی کامل با رأس X و با قاعده‌ای به شعاع R و مرکز O واقع بر فضای n−۱ بعدی $S_{n-۱}$ را در نظر می‌گیریم. فضای n−۱ بعدی $S'_{n-۱}$ را از بین X و $S_{n-۱}$ و موازی با $S_{n-۱}$ گذر می‌دهیم.

از آنجا که این قضیه در صدد اثبات یک مکان هندسی است، پس شامل دو بخش شرط لازم و کافی است. نخست باید ثابت شود که نقاط واقع بر تقاطع $S'_{n-۱}$ و سطح مخروطی روی یک گوی n−۱ بعدی معین واقع‌اند. برای اثبات این گزاره دو حالت زیر لحاظ می‌شود:

الف) $S_{n-۱}$ و $S'_{n-۱}$ با هم اشتراک دارند. اکنون چون این دو فضا موازی و هم‌بعد هستند، پس فصل مشترک $S'_{n-۱}$ و سطح مخروطی، همان فصل مشترک $S_{n-۱}$ و سطح مخروطی (قاعده‌ی مخروط) بوده و حکم ثابت است.

ب) دو فضای $S_{n-۱}$ و $S'_{n-۱}$ جدا از هم باشند. در این حالت نقطه‌ی A' را به دلخواه روی فصل مشترک سطح مخروطی و فضای $S'_{n-۱}$ در نظر می‌گیریم. چنان که از تعریف بر می‌آید سطح مخروطی تشکیل شده از خطوط واصل بین رأس و قاعده است. پس چون A' روی سطح مخروطی است، پس باید روی یکی از خطوط واصل بین رأس X و نقطه‌ای چون A از گوی قاعده‌ی مخروط نیز واقع باشد. اکنون رأس X را به مرکز قاعده (O) متصل می‌کنیم تا فضای $S'_{n-۱}$ در نقطه‌ی O' قطع شود.

می‌دانیم که فضای شامل یک شکل، فضای حامل آن شکل را هم در بر می‌گیرد. پس صفحه‌ی دوبعدی دربرگیرنده‌ی نقاط X و O و A چون شامل O و X است، پاره‌خط OX را و

چون شامل A و X است، پاره‌خط AX را در بر دارد. از سوی دیگر A' در AX و O' نیز در OX است. بنابراین صفحه‌ی یاد شده دربرگیرنده‌ی نقطه‌های A' و O' نیز می‌شود. نیز به دلیلی که هم اکنون ذکر شود می‌توان گفت که این صفحه شامل O و A و نیز O' و A' است و در نتیجه باید امتدادهای OA و $O'A'$ را در بر داشته باشد. از همه‌ی اینها در پایان نتیجه می‌شود که خطوط حامل OA و $O'A'$ در یک صفحه می‌گنجند.

به برهان خلف می‌توان این را هم ثابت کرد که امتدادهای OA و $O'A'$ با یکدیگر تلاقی ندارند، چون اگر این دو خط در یک نقطه مشترک باشند، آنگاه دو فضای S_{n-1} و S'_{n-1} که به ترتیب دربرگیرنده‌ی OA و $O'A'$ هستند نیز در آن نقطه مشترک خواهند بود و این با فرض بند (ب) مبنی بر جدا از هم بودن این دو فضا سازگاری ندارد.

تا کنون ثابت شد که خطوط حامل OA و $O'A'$ در یک صفحه جا گرفته و با هم تلاقی ندارند. چنانکه می‌دانیم این برای اثبات موازی بودن این دو خط بر اساس تعریف توازی کافی است. اکنون با توجه به توازی OA و $O'A'$ بر اساس قضیه‌ی شبه تالس در مثلث‌های ΔXOA و $\Delta XO'A'$ داریم:

$$O'A'/OA = XO'/XO$$

از آنجا که OA با جا به جایی A تغییری نمی‌کند و همواره برابر شعاع گوی قاعده‌ی مخروط (R) است، رابطه‌ی اخیر به این صورت در خواهد آمد:

$$O'A'/OA = XO'/XO \;\Rightarrow\; O'A'/R = XO'/XO \;\Rightarrow\; O'A' = R.XO'/XO$$

بنابراین هر نقطه‌ی دلخواه مانند A' روی فصل مشترک سطح مخروطی و فضای S'_{n-1} از نقطه‌ی O' (محل تلاقی OX و S'_{n-1}) به فاصله‌ی ثابت $R.XO'/XO$ بوده و بر گویی $n-1$ بعدی با همین شعاع و مرکز O' قرار دارد.

در اثبات نیمه‌ی دوم قضیه باید ثابت شود که هر نقطه مانند A' روی گویی $n-1$ بعدی به مرکز O' (محل تلاقی OX و S'_{n-1}) و شعاع $R.XO'/XO$ در فضای S'_{n-1} واقع بر سطح مخروطی یاد شده خواهد بود:

برای اثبات از X خطی به A' وصل کرده و آن را ادامه می‌دهیم تا S'_{n-1} را در A قطع کند.

در اینجا با تکرار بخشی از استدلال نیمه‌ی نخست قضیه نتیجه می‌شود که OA و O′A′ موازی‌اند. بنا بر قضیه‌ی شبه تالس داریم:

$$OA = XO/XO' \,.\, O'A' \;\Rightarrow\; OA = XO/XO' \,.\, R \,.\, XO'/XO \;\Rightarrow\; OA = R$$

A روی S_{n-1} قرار دارد و از O بر همین فضا به فاصله‌ی R است، یعنی A روی قاعده‌ی مخروط واقع شده و XA که دربرگیرنده‌ی A′ است، یکی از خطوط سطح مخروطی خواهد بود. این بدان معنا است که A′ روی سطح مخروطی قرار دارد و حکم ثابت است.

قضیه: حجم یک مخروط ناقص n بعدی با ارتفاع h-h′ شعاع قاعده‌ی R و R′ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{V = \lambda_{n-1} \,.\, (h-h')/n \,.\, (R^n-R'^n)/(R-R')}$$

برهان: فضای حامل مخروط n بعدی مذکور را S_n و فضای حامل قاعده‌ی بزرگ آن را S_{n-1} می‌نامیم. از رأس هرم عمود AH را بر قاعده‌ی هرم وارد می‌کنیم. بنا بر تعریف مخروط، این عمود از مرکز قاعده می‌گذرد. اکنون در امتداد AH محور xOx′ را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که مبدأ آن محل تقاطع AH با قاعده‌ی کوچک باشد. در S_n فضای S'_{n-1} را موازی با S'_{n-1} رسم می‌کنیم به گونه‌ای که از نقطه‌ای به طول x بر محور xOx′ بگذرد. اینک تابع $f(x)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

اگر $x<h'$ یا $x>h$ باشد، فضای S'_{n-1} مخروط را قطع نمی‌کند که در این حالت هم $f(x)$ را صفر می‌گیریم.

اگر $h'\le x\le h$ باشد، آنگاه $f(x)$ را برابر با حجم درجه‌ی n−۱ فصل مشترک که یک گوی است n−۱ بعدی با شعاع R.x/h در نظر می‌گیریم. این شعاع را می‌توان به صورت‌های R′.x/h′ یا (R-R′).x/(h-h′) هم نوشت. اکنون بنا بر قضیه‌ی سوم این بخش حجم هرم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lambda_{n-1} \int_{h'}^{h} \left(\frac{R}{h}x\right)^{n-1} dx$$

برای حل کردن انتگرال بالا کافی است که تعویض متغیر زیر را انجام دهیم:

$$t=\frac{R}{h}x \quad \Rightarrow \quad dt=\frac{R}{h}dx \quad \Rightarrow \quad V=\lambda_{n-1}\frac{h}{R}\int_{R'}^{R} t^{n-1}dx=\lambda_{n-1}\frac{h}{R}\left|\frac{t^n}{n}\right|_{R'}^{R}$$

پس حجم درجه‌ی n مخروط ناقص n بعدی که h و h′ فواصل دو قاعده‌ی آن از رأس سطح مخروطی و R و R′ شعاع‌های آن دو قاعده باشند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = \lambda_{n-1} \,.\, h/n \,.\, (R^n-R'^n)/R$$
$$V = \lambda_{n-1} \,.\, h'/n \,.\, (R^n-R'^n)/R'$$
$$V = \lambda_{n-1} \,.\, (h-h')/n \,.\, (R^n-R'^n)/(R-R')$$

نیز اگر در این روابط به جای R′ و h′ صفر را قرار دهیم، فرمول حجم مخروط کامل به دست می‌آید. چنان که دیده می‌شود، حجم درجه‌ی n مخروط کامل n بعدی برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع در حجم درجه‌ی n−۱ قاعده بخش بر تعداد ابعاد مخروط:

$$V = {}^{h}/_{n}.\lambda_{n-1}.R^n$$

قضیه: حجم درجه‌ی n هرم ناقص n بعدی با ارتفاع h′ که حجم درجه‌ی n قاعده‌های آن برابر با S و S′ باشد، از رابطه‌ی رو به رو به دست می‌آید:

$$V=\frac{h'}{n}\times\frac{S^{\frac{n}{n-1}}-S'^{\frac{n}{n-1}}}{S^{\frac{1}{n-1}}-S'^{\frac{1}{n-1}}}$$

برهان: هرم و مخروط ناقص n بعدی را که ارتفاع هر دو برابر با h′ است و حجم درجه‌ی n−۱ قاعده‌ی بزرگ در هر دو برابر S می‌باشد، در نظر می‌گیریم. قاعده‌ی بزرگ هرم را S_1 و قاعده‌ی بزرگ مخروط را S_2 ، رأس سطح هرمی را A_1 و رأس سطح مخروط را هم A_2 می‌نامیم. آن دو را چنان قرار می‌دهیم که خودشان در یک فضای n بعدی و قاعده‌هایشان در یک

فضای $n-1$ بعدی قرار گیرند - یعنی فضای حامل‌شان (S_n) یکی بوده و فضای حامل قاعده‌های‌شان (S_{n-1}) نیز یکی باشد) و نیز نقاط A_1 و A_2 در یک سوی S'_{n-1} واقع شوند. اینک ثابت می‌کنیم که هر فضای $n-1$ بعدی S'_{n-1} که در فضای S_n موازی و نامتقاطع با S_{n-1} رسم شود، یا هیچ یک از آن دو شکل را قطع نمی‌کند و یا هر دو را در اشکال $n-1$ بعدی بسته‌ای قطع می‌کند که حجم درجه‌ی $n-1$ آنها با هم برابر است و از آن نتیجه می‌گیریم که حجم درجه‌ی n قاعده‌ی کوچک در هر دو شکل برابر بوده و بنا به فرض برابر با S' می‌باشد:

در آغاز عمودهای A_1H_1 و A_2H_2 را بر فضای S_{n-1} رسم می‌کنیم، بنا بر قضایای بخش اول امتدادهای این پاره‌خط‌ها تنها عمودهایی هستند که در فضای مرجع S_n از A گذشته و بر فضای S'_{n-1} عمودند. همچنین از قضایای فصل اول نتیجه می‌شود که هر یک از این دو امتداد فضای S'_{n-1} را در یک و تنها یک نقطه قطع می‌کنند. دو نقطه‌ی تقاطع به دست آمده را به ترتیب H_1' و H_2' می‌نامیم. اکنون پاره‌خط‌های H_1H_1' و H_2H_2' بر دو فضای $n-1$ بعدی موازی S_{n-1} و S'_{n-1} عمودند و آن دو را قطع می‌کنند. پس داریم:

$$A_1H_1=A_2H_2=h \;\Rightarrow\; A_2H_2'+H_2'H_2=A_2H_2'+H_2'H_2 \;\Rightarrow\; A_1H_1'=A_2H_2'$$

از روابط صفحه‌ی قبل برابری زیر به دست می‌آید. اکنون بنا بر قرارداد مقدار k را برابر با مقادیر طرفین این تساوی قرار می‌دهیم:

$$A_1H_1/A_1H_1' \;=\; A_2H_2/A'_2H_2 = k$$

فصل مشترک S'_{n-1} را با هرم S'_1 و با مخروط S'_2 می‌نامیم. می‌دانیم که اگر نقطه‌ای مانند M را روی S'_1 به رأس هرم (A_1) وصل کنیم، امتداد حاصل فضای S'_{n-1} را در نقطه‌ای چون M' از شکل S'_1 قطع می‌کند. نیز برای هر M' در S'_1 حاصل نقطه‌ای چون M در S_1 وجود دارد که با M' و A_1 بر روی یک خط راست قرار دارد. اکنون از امتدادهای متقاطع و نامنطبق A_1H_1 و A_1M یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که فصل مشترک آن با S_{n-1} و S'_{n-1}، امتدادهای H_1M و $H_1'M'$ هستند. این دو امتداد با هم موازی‌اند، زیرا یکدیگر را قطع نمی‌کنند و نیز در یک صفحه می‌گنجند. اکنون از قضیه‌ی تالس در هندسه‌ی مسطحه فرمول زیر نتیجه می‌شود:

$$A_1H_1/A_1H_1' = A_1M'/A_1M = k$$

پس برای هر M مقدار A_1M'/A_1M برابر است با مقدار ثابت A_1H_1'/A_1H_1 که آن را k نامیدیم. یعنی S'_1 مجانس S_1 نسبت به A_1 و با نسبت تجانس k است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که S'_2 هم مجانس S_2 نسبت به A_2 و با نسبت تجانس k می‌باشد. بنابراین بین حجم این قاعده‌ها این برابری‌ها را می‌توان نوشت:

$$S'_1/S_1 = S'_2/S_2 \quad , \quad S_1 = S_2 = S \quad \Rightarrow \quad S'_1 = S'_2$$

درنتیجه بنا بر اصل پنجم (تعمیم اصل کاوالیری) دو شکل مذکور با هم برابرند. از تعریف حجم هم نتیجه می‌شود که حجم‌های دو شکل برابر، با هم برابرند. یعنی حجم درجه‌ی n هرم ناقص n بعدی با ارتفاع h' که حجم درجه‌ی n−۱ قاعده‌های آن برابر با S و S' باشد، برابر است با حجم مخروطی به ارتفاع h' که حجم درجه‌ی n−۱ قاعده‌های آن مخروط برابر با S و S' باشد. اکنون حجم درجه‌ی n مخروط که همان حجم درجه‌ی n هرم مذکور است، برابر است با:

$$V=\frac{h'}{n}\lambda_{n-1}\frac{R^n-R'^n}{R-R'}=\frac{h'}{n}\cdot\frac{\left(\lambda_{n-1}R^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}}-\left(\lambda_{n-1}R'^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}}}{\left(\lambda_{n-1}R^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}-\left(\lambda_{n-1}R'^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}}=\frac{h'}{n}\cdot\frac{S^{\frac{n}{n-1}}-S'^{\frac{n}{n-1}}}{S^{\frac{1}{n-1}}-S'^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$V=\frac{h'}{n}\left(S+S^{\frac{n-2}{n-1}}S'^{\frac{1}{n-1}}+S^{\frac{n-3}{n-1}}S'^{\frac{2}{n-1}}+S^{\frac{n-4}{n-1}}S'^{\frac{3}{n-1}}+\ldots+S'\right)$$

با گذاشتن صفر به جای S' و h به جای h' نتیجه می‌شود که حجم درجه‌ی n یک هرم کامل n بعدی برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع در حجم درجه‌ی n−۱ قاعده بخش بر n یا تعداد ابعاد هرم:

$$V = h.s/n$$

۴

بردارها به یاری ابعاد می‌شتابند

در جبر مجرد هر جا که سخن از فضاهای برداری و خطی به میان می‌آید، معمولاً جنبه‌ی هندسی فضا از یاد می‌رود. در آنجا آنچه مهم است این است که فضا مجموعه‌ای از بردارها است که با اعمال تعریف شده در برخی از فرمول‌ها صدق کنند، این در حالی است که برخی از این گفتارها تعبیر هندسی بسیار زیبا و کارآمدی دارند و حتا برخی از قضایای فضای برداری بسیاری از قضایایی را که در این کتاب با مقدمه‌ی فراوان ثابت کردیم، به سادگی تأیید می‌کنند، به گونه‌ای که انگار واقعیتی یگانه وجود دارد که از دو دیدگاه متمایز مشاهده و بررسی شده و در نتیجه به دو زبان متفاوت بیان شده است. هدف اصلی این بخش از کتاب، ترجمه‌ی این دو زبان به یکدیگر است. در واقع بر آنیم تا جنبه‌های هندسی مباحث فضای برداری را آشکارتر کرده و پیوندی بین هندسه‌ی ابعاد و جبر بردارها برقرار سازیم.

پیش‌نیاز خواندن این بخش دانستن تعاریف فضای برداری، استقلال خطی، وابستگی خطی و پایه (مبنا) که در اینجا از ذکرشان خودداری می‌کنیم.

قضیه: در فضای مرجع n بعدی، n بردار مستقل خطی در فضای ۱−n بعدی نمی‌گنجند.

برهان: در قضایای بخش نخست گفته شد که هر n خط همرس در یک فضای n بعدی می‌گنجند. با اثبات این قضیه ثابت خواهد شد که n بردار مستقل خطی (که همگی از مبدأ می‌گذرند) در یک فضای ۱−n بعدی نمی‌گنجند، پس چون در یک فضای n بعدی جای می‌گیرند پس n بردار مستقل خطی همواره معرف یک شکل n بعدی هستند و فضای حامل یگانه‌ای چون IR^n دارند.

برای اثبات برهان خلف را به کار می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم که بردارهای یادشده در یک فضای ۱−n بعدی مانند S_{n-1} جای گیرند. اکنون بردار دلخواه و مخالف صفر را عمود بر S_{n-1} و واقع در فضای مرجع، در نظر می‌گیریم. از مباحث فضای برداری می‌دانیم که هر n بردار مستقل خطی در فضای IR^n یک پایه (مبنا) به شمار می‌روند و هر بردار IR^n را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از این n بردار نوشت:

$$\vec{V} = x_1.\vec{\alpha_1} + x_2.\vec{\alpha_2} + \ldots + x_n.\vec{\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\vec{\alpha_i}$$

روشن است که در این لحظه هیچ چیز به اندازه‌ی یک تناقض شما را شادمان نمی‌کند و البته ممکن است برای دستیابی به این تناقض دست به هر کاری بزنید، حتا اگر آن کار ضرب کردن درونی بردار در طرفین برابری بالا باشد:

$$\left|\vec{V}\right|^2 = \vec{V}.\vec{V} = (\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\alpha_i}).\vec{V} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\vec{\alpha_i}).\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\vec{\alpha_i}.\vec{V}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{V}\right| = 0$$

همانگونه که دیدید با پخش کردن ضرب درونی نسبت به جمع بردارها و به کار گیری ویژگی سوم ضرب اسکالر در فضاهای برداری توانستیم حاصل‌ضرب درونی بردار $\vec{V}$ در خودش را بر حسب مجموعی از $x_i(\vec{\alpha_i}.\vec{V})$ ها بنویسیم. اما $\vec{V}$ بر فضای S_{n-1} عمود است، پس بر همه‌ی امتدادهای درون آن از جمله بردارهای $\vec{\alpha_i}$ عمود می‌باشد، پس حاصل‌ضرب درونی $\vec{\alpha_i}.\vec{V}$ صفر بوده و مجموع مذکور هم برابر با صفر می‌باشد. این نتیجه بدین معنا است که اندازه‌ی بردار $\vec{V}$ بر خلاف آنچه که فرض کرده بودیم برابر با صفر است. بنابراین بر اساس برهان خلف ثابت می‌شود که فرض گنجیدن بردارها در یک فضای ۱−n بعدی، ناممکن بوده و n بردار مستقل

خطی در فضای n-۱ بعدی نمی‌گنجند و یک شکل n بعدی را مشخص می‌کنند.

قضیه‌ای که گفته شد، نخستین پل را بین روابط جبری فضای برداری و توجیه هندسی آنها برقرار می‌کند. در واقع هنگامی که n بردار مستقل خطی باشند، فضایی n بعدی را مشخص می‌کنند و در کمتر از آن نمی‌گنجند. در گفتار استقلال خطی به تعداد این بردارها (n) بُعد گفته می‌شد و اکنون می‌بینید که این بعد همان تعداد ابعاد فضای حامل این n بردار مستقل خطی است[1]. مفهوم نخستینی که ما در هندسه‌ی ابعاد از آن به فضای اقلیدسی یاد می‌کنیم، همان چیزی است که در جبر مجرد نام فضای برداری را برایش گزیده‌اند. نیز همان گونه که زیرفضا در هندسه‌ی اقلیدسی زیرمجموعه‌ای است از یک فضای اقلیدسی که خود اقلیدسی باشد، در جبر مجرد هم زیرفضا زیرمجموعه‌ای است از یک فضای برداری که خودش هم فضای برداری باشد. بدین ترتیب زیرفضا در هندسه‌ی ابعاد هم مانسته‌ی زیرفضا در فضای برداری است.

برای بیان شباهت‌های دیگر می‌توان گفت که گروه‌خط n تایی را که در بخش‌های پیشین تعریف کردیم در واقع مانسته‌ی n بردار مستقل خطی است که به عنوان یک پایه (مبنا) برای معرفی یک فضای برداری n بعدی به کار می‌رفت. در واقع هم گروه‌خط n تایی و هم اجتماع بردارهای مبنای فضای برداری n بعدی، هر دو اشکالی n بعدی هستند و در کمتر از آن جای نمی‌گیرند و همانگونه که یک مجموعه‌ی بردارهای وابسته‌ی خطی با حذف یک یا چند بردار به مجموعه‌ای مستقل خطی تبدیل می‌شود، مجموعه‌ای از خطوط همرس که تشکیل یک گروه‌خط نمی‌دهند را نیز می‌توان با برداشتن خط یا خطوطی به یک گروه‌خط تبدیل کرد. یعنی برای معرفی فضای حامل n بردار وابسته‌ی خطی، نیازی به همه‌ی آن بردارها نیست و دست کم یکی از آنها در فضای حامل بردارهای دیگر جای می‌گیرد.

دو حلقه از یک زنجیر

قضیه‌ای که این چنین بی مقدمه بیان شد، ارتباط تنگاتنگ و مهمی بین دو مبحث هندسی و تحلیلی ابعاد برقرار می‌سازد. به دست آمدند که این خود گام بزرگی است در راستای پیوند دادن مباحث فضای برداری و هندسه‌ی ابعاد. چنانکه خواهید دید برخی از قضایایی که ما در بخش

[1] هر بردار دلخواه در این فضای حامل n بعدی را می‌توان به صورت ترکیب خطی از این n بردار بیان کرد.

نخست ثابت کردیم و نیز گزاره‌هایی که در گفتار استقلال و وابستگی خطی مطرح می‌شوند یکدیگر را تأیید می‌کنند. در اینجا چند نمونه از آنها ذکر شده‌اند:

اگر S زیرفضای V باشد، بُعد S از بعد V کمتر است:

در بخش نخست با به‌کارگیری اصل چهارم از اصول موضوع تعمیم این قضیه را به زبان هندسی ثابت کردیم: *اگر یک شکل m بعدی در یک فضای اقلیدسی n بعدی باشد، آنگاه m کوچک‌تر یا مساوی با n است.*

اگر S زیرفضای V بوده و بعد S با بعد V برابر باشد S همان V است.

سومین قضیه‌ی بخش اول و در نتیجه سومین قضیه‌ی این کتاب معادل هندسی این قضیه را چنین بیان می‌کند: *اگر یک فضای اقلیدسی n بعدی شامل یک فضای اقلیدسی n بعدی باشد، آن دو فضا بر هم منطبق‌اند.*

هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از چند بردار مستقل خطی خود مستقل خطی است.

این قضیه بیان دیگری از یکی از قضایای بخش نخست است مبنی بر اینکه هر k خط از یک گروه‌خط n تایی خود تشکیل یک گروه‌خط k تایی می‌دهند. ($k \leq n$)

اجتماع چند بردار وابسته‌ی خطی با هر بردار دیگر باز هم وابسته‌ی خطی است.

روشن است که اضافه کردن چند خط همرس به n خط همرس که خود گروه‌خط نیستند نمی‌تواند گروه‌خط جدیدی بسازد، زیرا بنا بر گزاره‌ی پیشین گروه‌خط بودن n خط همرس مذکور برای آنکه اجتماع آن با خطوطی دیگر گروه‌خط باشد، شرط لازم است. این مسأله را نیز می‌توان چنین تعبیر کرد که بردار یا بردارهای اضافی که در مجموعه‌ی بردارهای وابسته‌ی خطی وجود دارند، در اجتماع آن با هر بردار دیگری وجود دارند و همان عناصر اضافی برای اینکه اجتماع حاصل وابسته‌ی خطی باشد، کافی‌اند.

بردارهای تشکیل‌دهنده‌ی پایه‌ی استاندارد مستقل خطی هستند.

پایه‌ی استاندارد n بعدی شامل n بردار یکه‌ی دو به دو متعامد است که بردارهای آن در

امتداد محور طول‌ها، عرض‌ها و ... قرار دارند. این پایه به عنوان آسان‌ترین پایه (مبنا) برای بیان کردن همه‌ی بردارهای n بعدی به کار می‌رود. تعمیم گزاره‌ی مذکور در بخش نخست به کمک استقرای ریاضی بدین صورت ثابت شده است: هر n خط همرس دو به دو عمود بر هم یک گروه‌خط n تایی را تشکیل می‌دهند. (n≥۲)

n+۱ بردار در یک فضای برداری n بعدی وابسته‌ی خطی هستند.

عکس نقیض این قضیه به روشی متفاوت با اثبات برداری آن در صفحه‌ی قبل ثابت شد. اما در اینجا بر آنیم که معادل این گزاره در هندسه‌ی ابعاد را ثابت کنیم. اثبات به برهان خلف است: اگر n+۱ خط همرس یک گروه‌خط را بسازند یک فضای n+۱ بعدی را معین می‌کنند و در فضای n بعدی نمی‌گنجند و این خلاف فرض است، پس n+۱ خط همرس در یک فضای n بعدی تشکیل یک گروه خط را نمی‌دهند. این گزاره بیان هندسی این قضیه است.

هر فضای برداری که دارای مولد متناهی باشد، دارای مبنای متناهی هم هست.

معادل این قضیه در هندسه‌ی ابعاد را می‌توان به این صورت بیان کرد: فضای حامل n خط همرس دارای یک گروه‌خط با تعداد خطوط متناهی است. برای اثبات این گزاره از این قضیه استفاده می‌کنیم که n خط همرس حتماً در یک فضای n بعدی می‌گنجند. بنابراین فضای حامل آنها هم در آن فضای n بعدی می‌گنجد، در نتیجه بُعد فضای حامل آن خطوط عددی کوچک‌تر یا مساوی با n است. از سوی دیگر چون فضای حامل یاد شده دارای دست کم یک خط است پس بُعد آن از یک بیشتر است، بنابراین عددی صحیحی چون m در شرط (n≥m≥۱) وجود دارد که فضای حامل n خط همرس مذکور m بعدی بوده و در نتیجه دارای گروه‌خط m تایی متناهی باشد.

هر خط عمود بر یک فضای اقلیدسی بر همه‌ی خطوط آن فضا عمود است.

برخلاف چند گزاره‌ی قبل که از هندسه‌ی ابعاد برای پشتیبانی از قضایای جبر مجرد هندسه‌ی کمک می‌گرفتیم، این بار روش‌های برداری را برای اثبات گزاره‌ای هندسی به کار می‌گیریم. گزاره‌ای که گفته شد، اصل موضوعه‌ی یازدهم هندسه‌ی ابعاد است که اینک با جبر بردارها قصد تأیید آن را داریم:

فرض می‌کنیم که بردار بر فضای S_n عمود باشد. از تعریف تعامد در فضای S_n نتیجه می‌گیریم که در این فضا n بردار مستقل خطی مانند (در واقع یک گروه خط n تایی) وجود دارند که بردار بر آنها عمود است:

$$\vec{\alpha}_i . \vec{V} = ۰$$

از سوی دیگر می‌دانیم که در فضای S_n هر بردار دلخواه چون $\vec{V}$ را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای نوشت:

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=۱}^{n} x_i \vec{\alpha}_i$$

اکنون بردار $\vec{V}$ را در طرفین ضرب درونی می‌کنیم.

$$\vec{\alpha}.\vec{V} = (\sum_{i=۱}^{n} x_i \vec{\alpha}_i).\vec{V} = \sum_{i=۱}^{n} (x_i \vec{\alpha}_i).\vec{V} = \sum_{i=۱}^{n} x_i \overrightarrow{(\alpha_i . \vec{V})} = ۰$$

حاصل ضرب بردارهای $\vec{V}$ و $\vec{\alpha}$ برابر با صفر بوده و ابن دو بردار بر هم عمودند. پس اگر بردار $\vec{V}$ بر فضای S_n عمود باشد، بر هر بردار دلخواه $\vec{\alpha}$ ار فضای S_n هم عمود است.

تعمیم ضرب‌های بردارها

دو بردار α و β را در IR^n در نظر بگیرید. می‌خواهیم حاصل ضرب درونی (عددی) این دو بردار را به دست بیاوریم. برای این کار کافی است که بردار α را روی بردار β تصویر کنیم تا بردار جدیدی به نام β' به دست آید. اکنون ضرب درونی این دو بردار برابر با حاصل‌ضرب اندازه‌ی بردارهای α و β' می‌باشد و نیز اگر زاویه‌ی بین دو بردار را θ و مولفه‌های بردارهای α و β را به ترتیب α_i و β_i بنامیم، رابطه‌ی زیر هم برقرار است:

$$\alpha.\beta = |\alpha||\beta'| = |\alpha||\beta| \cos\theta = \alpha_۱\beta_۱ + \alpha_۲\beta_۲ + \alpha_۳\beta_۳ + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

اکنون می‌خواهیم ضرب برداری (بیرونی) این دو بردار را در IR^n محاسبه کنیم. برای این کار از دترمینان ضرب برداری نمی‌توان استفاده کرد، زیرا همانگونه که می‌بینید برای $n<۳$ تعداد سطرهای ماتریس زیر که همواره سه است با تعداد ستون‌های آن که بعد فضای برداری است برابر نبوده و در نتیجه ماتریس زیر مربعی نمی‌باشد. بنابراین از آنجا که دترمینان تنها برای ماتریس‌های مربعی معنا دارد، هنگامی که $n<۳$ برقرار باشد، ضرب برداری تعریف نمی‌شود. این مورد برای ضرب مختلط (سه‌گانه‌ی عددی) هم برقرار است، چرا که دترمینان ماتریس سه سطری و n ستونی آن تنها هنگامی تعریف شده است که $n=۳$ باشد. ماتریس‌های زیر این موضوع را به خوبی نشان می‌دهند:

$$\alpha\times\beta=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_۱ & \mathbf{e}_۲ & \mathbf{e}_۳ & \dots & \mathbf{e}_n \\ \alpha_۱ & \alpha_۲ & \alpha_۳ & \dots & \alpha_n \\ \beta_۱ & \beta_۲ & \beta_۳ & \dots & \beta_n \end{vmatrix} \quad , \quad \alpha.(\beta\times\gamma)=\begin{vmatrix} \alpha_۱ & \alpha_۲ & \alpha_۳ & \dots & \alpha_n \\ \beta_۱ & \beta_۲ & \beta_۳ & \dots & \beta_n \\ \gamma_۱ & \gamma_۲ & \gamma_۳ & \dots & \gamma_n \end{vmatrix}$$

این مشکل را از دیدگاه هندسی می‌توان چنین تعبیر کرد که حاصل ضرب برداری دو بردار ناهم‌راستای مخالف صفر، با خود آن دو بردار تشکیل سه بردار مستقل خطی می‌دهند که همانطور که می‌دانید دست کم نیاز به یک فضای سه‌بعدی دارند و در کمتر از آن نمی‌گنجند. پس در حالتی که $n<۳$ است، سه بردار α و β و $\alpha\times\beta$ در IR^n نمی‌گنجند. همچنین در فضاهای بیش از سه بعد بی‌شمار راستای عمود بر بردارهای α و β وجود دارد و از این رو $\alpha\times\beta$ در حالت $n>٤$ هم در IR^n تعریف نمی‌شود.

پس ضرب برداری و نیز ضرب مختلطی که ما می‌شناسیم تنها برای فضای $IR^۳$ تعریف می‌شوند و برای IR^n تعمیم‌پذیر نیستند مگر آنکه آنها را به صورت کلی‌تری تعریف کنیم.

ضرب برداری چند بعدی: در فضای n بعدی IR^n ، ضرب برداری n بعدی $n-۱$ بردار، برداری در همان فضا است. بنابراین ضرب برداری از مجموعه‌ی $IR^n\times\dots\times IR^n$ در IR^n تعریف می‌شود:

$$\rho_n : IR^n\times\dots\times IR^n \rightarrow IR^n$$

بردار حاصل‌ضرب برداری n بردار در فضای IR^n از دترمینان زیر به دست می‌آید:

$$\rho_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \ldots & \mathbf{e}_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & \ldots & \alpha_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

در این بخش ثابت خواهیم کرد که بردار به دست آمده بر هر n−۱ بردار مذکور عمود است. اکنون چند حالت خاص از ضرب برداری چندبعدی را معرفی و محاسبه می‌کنیم:

در حالت n=۱ ضرب برداری در IR تعریف می‌شود. این عمل در این حالت هیچ ورودی ندارد و همواره برابر با بردار یکه‌ی محور طول‌ها می‌باشد:

$$\rho_1 = |i| = i$$

در حالت n=۲ ضرب برداری یک بردار در IR^2 دریافت می‌کند و دوران یافته‌ی آن را گرد مبدأ مختصات و با زاویه‌ی °۹۰ بر می‌گرداند، بنابراین ضرب برداری دوبعدی همان دوران نود درجه‌ی گرد مبدأ مختصات است.

$$\rho_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2\mathbf{i} - \alpha_1\mathbf{j} = R_O^{90^\circ}(\alpha)$$

در حالت n=۳ ضرب برداری دو بردار در IR^3 می‌گیرد و برداری عمود بر آن دو بر می‌گرداند به گونه‌ای که طول این بردار برابر با سطح متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع مجاور آن دو بردار یاد شده هستند. این ضرب همان ضرب بیرونی است که از پیش می‌شناسیم:

$$\rho_3(\alpha,\beta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \alpha \times \beta$$

ضرب مختلط چند بعدی: در فضای n بعدی IR^n ضرب برداری n بعدی n بردار، عددی حقیقی خواهد بود در همان فضا. پس ضرب مختلط چند بردار از مجموعه‌ی $IR^n \times \ldots \times IR^n$

در مجموعه‌ی IR تعریف می‌شود:

$$\phi_n : IR^n \times \ldots \times IR^n \rightarrow IR^n$$

ضرب مختلط n بردار در فضای IR^n برابر با دترمینان زیر است:

$$\phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

در حالت n=۱ ضرب مختلط در IR تعریف می‌شود. این عمل در این حالت یک بردار می‌گیرد و اندازه‌ی آن را برمی‌گرداند:

$$\phi_1(\alpha) = |\alpha| = \alpha$$

در حالت n=۲ ضرب مختلط دو بردار در IR^2 به صورت دترمینان زیر محاسبه می‌شود. چنانکه از گذشته می‌دانید این دترمینان سطح متوازی‌الاضلاعی را به دست می‌دهد که اضلاع مجاور آن دو بردار α و β هستند:

$$\rho_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$$

در حالت n=۳ ضرب مختلط بردارها در IR^3 انجام می‌گیرد و حجم متوازی‌السطوحی را برمی‌گرداند که این سه بردار سه یال مجاور آن هستند. همان گونه که می‌دانید این ضرب همان ضرب سه‌گانه‌ی عددی است که ما آن را برای فضای n بعدی تعمیم دادیم:

$$\phi_3(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha.(\beta \times \gamma)$$

شایان ذکر است که از آنجا که ضرب برداری (ρ_n) و نیز ضرب مختلط (ϕ_n) را به صورت دترمینان تعریف نمودیم، پس برای تعریف شده بودن این دترمینان باید ماتریس یاد شده مربعی باشد، بنابراین ρ_n و ϕ_n تنها در فضای IR^n تعریف می‌شوند، و در فضاهایی با تعداد ابعاد بیشتر یا کمتر معنا ندارند.

اکنون هنگام آن شده که ضرب‌های درونی، برداری و مختلط را با هم پیوند دهیم. قضیه‌ی زیر با یک رابطه‌ی ساده انجام ساده این کار را انجام می‌دهد:

قضیه: ضرب مختلط n بردار برابر است با حاصل ضرب درونی نخستین بردار در حاصل‌ضرب بیرونی ۱-n بردار دیگر.

$$\phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 \,.\, \rho_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

برهان: بردار α_1 دارای n مؤلفه به صورت زیر است:

$$\alpha_1 = \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\,\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\,\mathbf{e}_3 + \ldots + \alpha_{1n}\mathbf{e}_n = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n})$$

دترمینان ماتریس کهاد نظیر درایه‌ی سطر نخست و ستون j ام ماتریس ضرب خارجی n بعدی زیر را A_{1j} می‌نامیم. اکنون دترمینان ماتریس مرتبه‌ی n زیر مذکور بر حسب A_{1j} چنین به دست می‌آید:

$$\rho_n(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 A_{11} + \mathbf{e}_2 A_{12} + \ldots + \mathbf{e}_n A_{1n}$$

$$\rho_n(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = (A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1n})$$

برای کامل شدن اثبات قضیه باید α_1 را در $\alpha_1.\rho_n(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ ضرب درونی کنیم:

$$\alpha_1 . \rho_n(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}) . (A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{1n})$$
$$= \alpha_{11} . A_{11} + \alpha_{12} . A_{12} + \alpha_{13} . A_{13} + \ldots + \alpha_{1n} . A_{1n}$$

$$\left| \rho_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \right| = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$\phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 . \rho_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

قضیه: ضرب برداری (بیرونی) چند بعدی چند بردار بر آن بردارها عمود است.

برهان: فرض می‌کنیم بردار α حاصل‌ضرب بیرونی n بعدی بردارهای α_1 ، α_2 ، ... و α_{n-1} در IR^n باشد. اکنون ثابت می‌کنیم که α بر همه‌ی بردارهای α_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$) عمود است و برای بررسی عمود بودن آن دو بردار کافی است ضرب درونی‌شان را بررسی کنیم:

$$\alpha_i . \alpha = \alpha_i . \rho_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) = \phi_n(\alpha_i, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1})$$

چنانکه در فرمول بالا دیده می‌شود، به جای حاصل ضرب درونی یک بردار با ضرب بیرونی چندبعدی بردارهای دیگر، ضرب مختلط چندبعدی آنها را قرار داده‌ایم. اینک اگر رابطه‌ی فوق را به صورت دترمینان تعریف ضرب مختلط چندبعدی بنویسیم، دیده می‌شود که سطر نخست این دترمینان که شامل مختصات یکی از n−1 بردار دیگر است دست کم با سطری دیگر از این ماتریس برابر است و درنتیجه مقدار این دترمینان صفر می‌باشد. بنابراین ضرب درونی α و α_i برابر با صفر بوده و α بر α_i عمود است:

$$\alpha_i . \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,2} & \alpha_{i,3} & \ldots & \alpha_{i,n} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & \ldots & \alpha_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha \perp \alpha_i$$

قضیه: اگر بردارهای α_1 ، α_2 ، ... و α_n بردارهایی در IR^n باشند، ضرب مختلط n بعدی آنها برابر با اندازه‌ی ضرب بیرونی n+1 بعدی‌شان است.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in IR^n \quad ; \quad \phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = |\rho_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$$

برهان: در آغاز با توجه به اینکه مؤلفه‌ی n+1 ام همه‌ی بردارهای داده شده برابر با صفر هستند، ضرب بیرونی بردارهای داده شده را با استفاده از قوانین دترمینان ساده می‌کنیم:

$$\rho_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \cdots & \mathbf{e}_n \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & \cdots & \alpha_{n-1,n} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_{n+1} \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

آنگونه که دیده می‌شود، حاصل ضرب بیرونی این n بردار برداری است در امتداد محور x_{i+1} ها که بردار یکه‌ی آن e_{i+1} و اندازه‌اش برابر با ضریب این بردار یکه می‌باشد:

$$\left| \rho_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \right| = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

بنابراین در حالتی که n بردار داده شده همگی در IR^n قرار داشته باشند، داریم:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in IR^n \quad ; \quad \phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = |\rho_{n+1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)|$$

بردار نرمال یک فضای چندبعدی

بردار نرمال یک فضای m بعدی برداری است که راستایش عمود بر فضای مذکور باشد و با در دست داشتن آن بردار بتوانیم راستای آن فضای m بعدی را تعیین کنیم. در فضای n بعدی

بر فضاهای تک‌بعدی، دوبعدی، ... و ۲–n بعدی می‌توان بی‌شمار راستای خط را عمود کرد. نیز در یک فضای n بعدی، عمود بر یک خط بی‌شمار راستای فضاهای تک‌بعدی، دوبعدی، ... و ۲-n بعدی وجود دارد، بنابراین در یک فضای n بعدی با داشتن امتداد عمود بر این فضاها نمی‌توان راستای فضاهای یاد شده را تعیین کرد، زیرا این راستا یگانه نیست. اما در فضای مرجع n بعدی عمود بر یک فضای ۱-n بعدی یک و تنها یک راستای خط رسم می‌شود و نیز عمود بر یک خط دقیقاً یک راستای فضای ۱-n بعدی وجود دارد [1]. بنابراین در یک فضای n بعدی بردار نرمال تنها برای فضای ۱-n بعدی تعریف می‌شود و برای بقیه‌ی ابعاد راستاها معنا ندارد.

اکنون با به کار گیری بردار نرمال می‌توانیم معادله‌ی برداری یک فضای ۱–n بعدی را در فضای مرجع n بعدی به دست آوریم:

قضیه: اگر انتهای بردار $\vec{X}_{\circ}$ نقطه‌ی ثابتی از یک فضای ۱–n بعدی و $\vec{V}$ بردار نرمال آن فضا در یک فضای مرجع n بعدی باشد، معادله‌ی مشخص کننده‌ی آن فضا در فضای مرجع عبارت است از:

$$\vec{V}.(\vec{X}-\vec{X}_{\circ})=\circ$$

برهان: فرض می‌کنیم انتهای بردار نقطه‌ای دلخواه از فضای S_{n-1} باشد. اینک $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ برداری است که آغاز آن پایان آن $\vec{X}$ بوده و چون دو نقطه از آن بر فضای S_{n-1} قرار دارد، پس تمامی آن بردار بر فضای S_{n-1} واقع است. اینک چون $\vec{V}$ بر S_{n-1} عمود است، پس بر $\vec{V}$ هم عمود است و حاصل‌ضرب درونی $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ و $\vec{V}$ برای هر $\vec{X}_{\circ}$ که روی S_{n-1} قرار داشته باشد، صفر است.

از سوی دیگر اگر حاصل‌ضرب درونی $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ و $\vec{V}$ برابر با صفر باشد، یعنی $\vec{V}$ بر $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ عمود است. حال باید ثابت کنیم که $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ با S_{n-1} موازی است. برای این کار برهان خلف را به کار گرفته و فرض می‌کنیم $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ که با S_{n-1} موازی نباشد. در این حالت گروه‌خط ۱-n تایی معرف S_{n-1} را رسم می‌کنیم. رأس این گروه‌خط را O نامیده و از نقطه‌ی O موازی با

[1] با توجه به تعریفی که در فصل پنجم از راستا ارائه کردیم، هنگامی که می گوییم یک و تنها یک فضای k بعدی عمود بر یک فضای m بعدی وجود دارد، منظور ما این است که همه ی فضا های k بعدی که بر آن فضای m بعدی عمود باشند، در راستای‌شان با هم مشترک اند و یا به بیانی دیگر موازی‌اند.

$\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ خط δ را رسم می‌کنیم. چون این خط با $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ موازی است، نمی‌تواند با S_{n-1} موازی باشد، بنابراین δ با گروه‌خط n-۱ تایی مذکور تشکیل یک گروه‌خط n تایی می‌دهد که معرف فضای n بعدی مرجع هستند و بردار $\vec{V}$ بر تک تک خطوط این گروه‌خط n تایی و در نتیجه بر فضای حامل آنها یعنی فضای مرجع عمود است و در نتیجه باید بر خودش هم که در فضای مرجع قرار دارد عمود باشد و این ناممکن است. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که بر اساس برهان خلف $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ با S_{n-1} موازی است و چون هر دو در انتهای بردار $\vec{X}_{\circ}$ مشترک‌اند، پس $\vec{X}-\vec{X}_{\circ}$ و در نتیجه‌ی آن انتهای بردار $\vec{X}$ در S_{n-1} قرار دارد.

بنابراین شرط لازم و کافی برای آنکه انتهای بردار $\vec{X}$ روی قرار داشته باشد این است که رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\vec{V}.(\vec{X}-\vec{X}_{\circ})=0$$

از این فرمول برداری به راحتی می‌توان معادله‌ی دکارتی فضای n-۱ بعدی را در فضای مرجع n بعدی به دست آورد. برای این کار در آغاز مؤلفه‌های سه بردار معادله‌ی بالا را این چنین معرفی می‌کنیم:

$$\vec{V}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \quad , \quad \vec{X}(x_1,x_2,\ldots,x_n) \quad , \quad \vec{X_{\circ}}(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$$

$$\vec{V}.(\vec{X}-\vec{X_{\circ}})=0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).(x_1-x'_1,x_2-x'_2,\ldots,x_n-x'_n)=0$$

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\ldots+\alpha_nx_n=\alpha_1x'_1+\alpha_2x'_2+\alpha_3x'_3+\ldots+\alpha_nx'_n$$

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\ldots+\alpha_nx_n=c$$

زاویه‌ی بین یک خط راست و یک فضای اقلیدسی

در فضای مرجع IR^n زاویه‌ی بین یک خط راست مانند δ و فضای n−۱ بعدی S_{n-1} را این چنین تعریف می‌کنیم:

اگر δ با S_{n-1} موازی باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی بین آن دو را صفر می‌گیریم ($\theta=0^{\circ}$).

اگر δ بر $S_{n-۱}$ عمود باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی بین آن دو را نود درجه می‌گیریم: ($\theta = ۹۰^\circ$).

در غیر این صورت بنا بر قضایای پایانی بخش نخست، خط δ و فضای $S_{n-۱}$ یکدیگر را در نقطه‌ی یگانه‌ای مانند O قطع می‌کنند. از نقطه‌ی O خط δ' را عمود بر $S_{n-۱}$ رسم می‌کنیم. همانگونه که گفته شد در این حالت δ' نشان‌دهنده‌ی راستای بردار نرمال $S_{n-۱}$ است. بر اساس آخرین قضیه‌ی بخش اول یک و تنها یک صفحه مانند P وجود دارد که از خطوط δ و δ' می‌گذرد و چنان که گفته شد، این صفحه فضای $S_{n-۱}$ را در یک و تنها یک خط راست چون δ'' قطع می‌کند. اکنون زاویه‌ی بین خط δ و فضای $S_{n-۱}$ را برابر با زاویه‌ی بین دو خط متقاطع δ و δ'' تعریف می‌کنیم.

$$\theta = \angle \delta' O \delta$$

شایان ذکر است که که سه خط δ ، δ' و δ'' بر یک صفحه یعنی صفحه‌ی P واقع‌اند و نیز δ بر δ'' عمود است. بنابراین زاویه‌ی بین خط δ و بردار نرمال فضای $S_{n-۱}$ مکمل زاویه‌ی بین δ و خود فضای $S_{n-۱}$ می‌باشد، همین نکته را می‌توان برای به دست آوردن فرمول تحلیلی زاویه‌ی بین یک خط و یک فضای $n-۱$ بعدی در فضای مرجع n بعدی به کار گرفت. بدین صورت که را بردار نرمال فضای $S_{n-۱}$ و را هم برداری دلخواه موازی با δ می‌گیریم. اکنون اگر زاویه‌ی بین خط δ و بردار نرمال فضای $S_{n-۱}$ را $۹۰^\circ-\theta$ بگیریم، زاویه‌ی بین خط δ و فضای $S_{n-۱}$ که همان θ است، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\vec{V}.\vec{\delta} = \left|\vec{V}\right| \left|\vec{\delta}\right| Cos\,(۹۰-\theta) \quad \Rightarrow \quad Sin\,\theta = \frac{\vec{V}.\vec{\delta}}{\left|\vec{V}\right| \left|\vec{\delta}\right|}$$

به دست آوردن حجم متوازی‌السطوح و هرم چندبعدی

در بخش گذشته نوید آن را دادیم که در این بخش حجم متوازی‌السطوح و نیز هرم دلخواه را به دست آوریم. اکنون بر آنیم که این کار را با بهره‌گیری از بردارها انجام دهیم:

قضیه: حجم متوازی‌السطوح n بعدی که n یال مجاور به یک رأس آن را n بردار مخالف صفر α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n تشکیل دهند، از این دترمینان به دست می‌آید:

$$V=\phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

برهان: در آغاز حکم را به صورت زیر، در فضای مرجع IR^{n+1} و به کمک استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$V=\phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

با استفاده از تعریف متوازی‌السطوح می‌توان نشان داد که متوازی‌السطوح تک‌بعدی یک پاره‌خط است. اکنون طول این پاره‌خط که همان حجم متوازی‌السطوح تک‌بعدی است، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V = \alpha_1 = |\rho_2(\alpha_2)| = \phi_1(\alpha_1)$$

چنانکه می‌بینید مقدمه‌ی استقرا یعنی حکم ♣ در حالت n=1 برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم که یک متوازی‌السطوح n بعدی در فضای مرجع n بعدی IR^n در دست باشد. قاعده‌ی این متوازی‌السطوح که خود متوازی‌السطوحی n−1 بعدی است را متشکل از بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_{n-1} در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که حجم این قاعده از رابطه‌ی حکم به دست آید. اینک باید ثابت کنیم که حجم خود متوازی‌السطوح نیز از همین رابطه نتیجه می‌شود. برای این کار نخست فضای حامل قاعده را S_{n-1} و زاویه‌ی بین بردار α_n و بردار نرمال را θ نامیده و جهت بردار نرمال آن را بردار یکه‌ی یگانه‌ای چون $\vec{u}$ در نظر می‌گیریم. بردار α_n را بر بردار $\vec{u}$ تصویر می‌کنیم تا بردار $\vec{u}'$ به دست آید. همانگونه که می‌دانید، طول این بردار که ارتفاع متوازی‌السطوح n بعدی اولیه است، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\left|\vec{u'}\right| = \left|\overrightarrow{\alpha_n}\right| Cos\,\theta$$

این بردار ارتفاع وارد بر قاعده‌ی متوازی‌السطوح n بعدی ما است. با توجه به اصل پنجم در تعریف حجم n بعدی حجم درجه‌ی n یک منشور برابر است با حاصل‌ضرب حجم درجه‌ی n-۱ قاعده در طول ارتفاع وارد بر آن قاعده:

$$\begin{aligned} V &= \left|\vec{u'}\right| \left|\rho_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})\right| \\ &= \left|\overrightarrow{\alpha_n}\right| \left|\rho_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})\right| Cos\,\theta \\ &= \overrightarrow{\alpha_n}.\rho_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}) \\ &= \phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) \\ &= \left|\rho_{n+1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\right| \end{aligned}$$

بنابراین از برقرار بودن فرض استقرا یا گزاره‌ی P (n-۱) درستی حکم استقرا یعنی گزاره‌ی P(n) را نتیجه گرفتیم. در نتیجه گزاره‌ی ♣ به کمک استقرا ثابت شده است. اینک چون بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n همگی در یک فضای n بعدی می‌گنجند و مختص n+۱ ام همه‌ی آنها صفر است، پس بر اساس قضیه‌ی رابطه‌ی مستقیم بین ضرب بیرونی و ضرب مختلط به آسانی می‌توان حکم اصلی قضیه را که حجم متوازی‌السطوح n بعدی را به دست می‌دهد، ثابت کرد:

$$V = \left|\rho_{n+1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\right| = \phi_n(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$$

اکنون که این قضیه را ثابت کرده‌ایم، می‌توانیم نقاب از چهره‌ی یکی دیگر از پیوندهای هندسه و جبر مجرد برداریم:

چنان که در آغاز این بخش گفته بودیم، وابستگی و استقلال n بردار نشان دهنده‌ی آن است که این بردارها در یک فضای n-۱ بعدی می‌گنجند یا خیر. از سوی دیگر در مباحث استقلال خطی برای تعیین کردن استقلال یا وابستگی چند بردار، دترمینان مختصات آنها (همان دترمینانی که ضرب مختلط از آن نتیجه می‌شود) را تشکیل می‌دهند. سپس در صورت صفر بودن

این دترمینان بردارهای یاد شده را وابسته و در غیر این صورت آنها را مستقل خطی اعلام می‌کنند. توجه داشته باشید که صفر بودن این دترمینان مرتبه‌ی n نشان دهنده‌ی این است که حجم درجه‌ی n متوازی‌السطوحی که یال‌های آن بر این بردارها بنا شود برابر با صفر است و این متوازی‌السطوح از فضای n بعدی هیچ حجمی را اشغال نمی‌کند. چنانکه می‌دانید این خود بدان معنا است که متوازی‌السطوح مذکور که حجمی محدب است و در نتیجه بردارهای تشکیل دهنده‌ی آن دست بالا یک فضای n-۱ بعدی را معین می‌کنند. همچنین اگر حجم درجه‌ی n این متوازی‌السطوح صفر نباشد، آنگاه این شکل در یک فضای n-۱ بعدی جای نمی‌گیرد، چون در صورت جای گرفتن در یک فضای n-۱ بعدی حجم n بعدی اشغال نمی‌شود. به بیانی دیگر شرط لازم و کافی برای آن که n بردار مستقل خطی باشند، این است که متوازی‌السطوحی که یال‌های مجاور به یک رأسش آن بردارها باشند، حجم n بعدی را اشغال کند. این خود تعبیری هندسی دیگری از استقلال و وابستگی خطی است که از قضیه‌ی اخیر ناشی شد.

و اما در اینجا با استفاده از مفاهیم برداری شکلی را معرفی خواهیم کرد و با توجه به تعریفی که پیشتر از هرم ارائه کرده بودیم، نشان می‌دهیم که این شکل هم نوعی هرم است. پس از آن طی یک قضیه با روش‌های برداری حجم هرم را بر حسب مختصات بردارهای تشکیل دهنده‌اش محاسبه می‌کنیم:

n بردار مخالف صفر مستقل خطی α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n را در فضای مرجع IR^n در نظر می‌گیریم. انتهای این بردارها n نقطه هستند که چنانکه می‌دانید حتماً در فضایی n-۱ بعدی چون S_{n-1} می‌گنجند. این فضا یگانه است چون اگر چنین نباشد، n نقطه‌ی یادشده در فضایی کمتر از n-۱ بعد و حتماً در یک فضای n-۲ بعدی جای می‌گیرند که این فضا با مبدأ مختصات روی هم رفته یک فضای n-۱ بعدی مانند S'_{n-1} را مشخص می‌کنند. این در حالی است که S'_{n-1} چون دو نقطه‌ی متمایز از بردارهای α_i (مبدأ مختصات و انتهای بردار) را در بر می‌گیرد، پس همه‌ی بردارهای مذکور را شامل است و این خلاف فرض استقلال خطی این بردارهاست، چون در صورت مستقل خطی بودن در یک فضای n-۱ بعدی جای نمی‌گیرند. اکنون با دانستن یگانه بودن فضای S'_{n-1} می‌توان نتیجه گرفت که شکل n-۱ بعدی که از پیوستن n نقطه‌ی انتهای بردارهای α_i به مبدأ مختصات به دست می‌آید، هرمی n بعدی خواهد بود. یال‌های مجاور به رأس این هرم همان n بردار یادشده خواهند بود.

قضیه: حجم هرم n بعدی که n یال مجاور به رأس آن را n بردار α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n مخالف صفر تشکیل دهند، از دترمینان مقابل به دست می‌آید:

$$V' = \frac{1}{n!}\phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \ldots & \alpha_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

(اگر یک هرم و یک متوازی‌السطوح n بعدی هر دو روی چارچوب بردارهای α_1، α_2، α_3 و ... و α_n ساخته شوند، حجم درجه‌ی n متوازی‌السطوح، n برابر حجم درجه‌ی n هرم خواهد بود.)

برهان: می‌توانیم رأس این هرم n بعدی را انتهای بردار α_n و بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_{n-1} را یال‌های قاعده در نظر بگیریم. بدین ترتیب قاعده‌ی این هرم خود هرمی n-۱ بعدی خواهد بود. همین ویژگی به ما امکان می‌دهد که استقرای ریاضی را به کار گیریم: متوازی‌السطوح و هرمی که روی بردار α_1 ساخته شوند، هر دو یکی هستند و عبارت‌اند از پاره‌خطی که α_1 را می‌سازد. پس طول یا حجم درجه‌ی هرم و متوازی‌السطوح تک‌بعدی مذکور با هم برابر بوده و عبارت است از طول این پاره‌خط. از این گفته‌ها می‌توان نتیجه گرفت که مقدمه‌ی استقرا برقرار است. اینک فرض می‌کنیم حجم هرم n-۱ بعدی که یال‌های مجاور به یک رأس آن بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و a_{n-1} هستند، برابر با حجم متوازی‌السطوح n−۱ بعدی با همین شرایط بخش بر !(n−۱) باشد. سپس ثابت می‌کنیم که این حکم برای هرم و متوازی‌السطوح n بعدی هم برقرار است. برای این کار حجم درجه‌ی n -۱ قاعده‌ی مذکور را S' و حجم درجه‌ی n هرم اصلی را هم V' می‌نامیم. با این حساب اگر فاصله‌ی انتهای بردار α_n از قاعده‌ی h باشد، بنا بر قضایای بخش گذشته حجم هرم از این رابطه به دست می‌آید:

$$V' = {}^{h.S'}/_{n}$$

اکنون حجم درجه‌ی n−۱ متوازی‌السطوح n−۱ بعدی که یال‌های مجاور به یک رأس آن

بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_{n-1} هستند را S و نیز حجم درجه‌ی n متوازی‌السطوح n بعدی اصلی که شامل همه‌ی بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n است را V می‌نامیم. اکنون فاصله‌ی انتهای بردار α_n از قاعده همان h است، زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی h را از فضای حامل n−۱ بعدی بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_{n-1} محاسبه کردیم که در واقع فضای حامل قاعده‌ی هرم و نیز قاعده‌ی متوازی‌السطوح n−۱ بعدی است. اکنون از فرض استقرا رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$S' = S.(n-1)!$$

نیز از اصل پنجم تعریف حجم درباره‌ی به دست آوردن حجم منشور داریم:

$$V = h.S$$

به این ترتیب از سه رابطه‌ی اخیر فرمول زیر را نتیجه می‌گیریم که مورد نظر ماست:

$$V' = ({}^{h}/_{n}).S' = ({}^{h}/_{n}).({}^{S}/_{(n-1)!}) = {}^{h.s}/_{n!} = {}^{V}/_{n!}$$

بنابراین از فرض استقرا ثابت کردیم که حجم هرم n بعدی که یال‌های مجاور به یک رأس آن بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n باشند، برابر با حجم متوازی‌السطوح n بعدی که یال‌های مجاور به رأس آن بردارهای α_1 ، α_2 ، α_3 و ... و α_n باشند، بخش بر n! است و این به منزله‌ی اثبات کامل قضیه با به‌کارگیری استقرا می‌باشد.

۵

پارامترهای معرف اشکال در هندسه‌ی ابعاد

دو بخشی که در پیش رو دارید در مسیری جداگانه از مسیر چهار بخش نخست قرار دارند. چهار فصل نخست را بر اساس قضایا و تعاریف و به روشی کاملاً منطقی استوار کردیم. در آنها هر گزاره‌ای یا اصل بود و یا بر اساس گزاره‌های منطقی به اصول موضوعه و گزاره‌های روشن ریاضیات استوار می‌شد. ولی این دو فصل به ناچار بیرون از سیر منطقی گذشته بیان شده‌اند. در مورد این فصل امکان آن وجود داشت تا *قانون کاستن پارامترها* به عنوان اصل موضوعه‌ی دوازدهم (در ادامه‌ی یازده اصل دیگر) بیان شود و فرمولی که در این بخش استنتاج خواهد شد در قالب یک اثبات شود، اما ابهام مبحثی که در پیش رو است و فقدان مدارک محکم و دلایل کافی می‌توانست ساختار هندسی گذشته را مختل کند. از این رو در این بخش و نیز بخش آینده خواننده با گزاره‌هایی روبه‌رو است که برای آنها اثبات–دست کم اثبات محکم–ارائه نشده است، هر چند که در همین مباحث از قضایایی اثبات شده در بخش‌های قبل استفاده‌ی زیادی شده است.

فرض کنید می‌خواهیم محل قرار گرفتن‌مان را بر روی کره‌ی زمین مشخص کنیم. آسان‌ترین راهی که در پیش روی ما است این است که موقعیت خود را در قالب دو عدد مانند عرض و طول جغرافیایی گزارش نماییم. یعنی موقعیت خود را در قالب دو پارامتر حقیقی بیان

کنیم. نگفته می‌دانید که طول یا عرض جغرافیایی حتا اگر به صورت درجه و دقیقه و ثانیه هم بیان شود معادل با یک عدد حقیقی است. چرا که هر زاویه را می‌توان هم بر حسب درجه و اضعاف غیر اعشاری آن مانند دقیقه و ثانیه بیان نمود و هم به صورت یک عدد حقیقی اعشاری با تعداد ارقام نا مشخص پس از ممیز.

اکنون یک پرسش مطرح می‌شود. آیا می‌توان تعداد این پارامترها را کاهش داد؟ پاسخ منفی است. در واقع مشخص کردن یک نقطه بر روی سطح یک کره‌ی سه‌بعدی از هر روشی که صورت گیرد دست کم به دو پارامتر نیاز دارد. اگر شما تنها یک پارامتر را به کار ببرید، مثلاً طول یا عرض جغرافیایی، فاصله‌ی آن نقطه از یک نقطه‌ی ثابت روی کره، زاویه‌ی مرکزی بین نقطه‌ی مذکور و یک وتر ثابت روی دایره و ... در حالت خوش‌بینانه تنها یک کمان به دست می‌آید که نقطه‌ی یادشده را در بر دارد، اما اینکه آن نقطه در کجای کمان واقع شده نیاز یک پارامتر دیگری دارد، هر چند که شما می‌توانید این نیاز را با چند پارامتر هم برآورده کنید. این به معنای آن است که تعداد این دو پارامتر را به هیچ وجه نمی‌توان کاهش داد، اما استفاده از پارامترهای بیشتر ممکن است. برای نمونه شما برای معرفی محل ایستادن خود بر روی سطح کره‌ی زمین می‌توانید در دو جهت روبه‌رو (مانند شمال شرقی و جنوب غربی) مسافتی ثابت (مانند ۵۰ کیلومتر) را طی کنید. آنگاه دو نقطه‌ی به دست آمده را بر حسب طول و عرض جغرافیایی‌شان ثبت نمایید. با در دست داشتن چهار پارامتر حاصل می‌توان نقطه‌ی قرار گرفتن شما که واقع بر نیمساز کمان واقع بر دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی ثبت شده است را به دست آورد. هر چند که می‌دانیم این کار چندان منطقی نیست چرا که بخشی از اطلاعات دور ریخته می‌شود. در واقع هنگامی که به جای دو پارامتر لازم و کافی از چهار پارامتر کافی و نه لازم استفاده کنیم، چنین چیزی دور از انتظار نیست.

تعیین یک نقطه در یک فضای اقلیدسی

برای معرفی کردن یک نقطه روی یک خط راست شما به یک پارامتر نیاز دارید. همان یکی هم کار شما را راه می‌اندازد مگر شما قصد استفاده از روش‌های عجیب و غریب را داشته باشید. برای این که یک نقطه را بر روی یک خط با یک پارامتر مشخص کنیم باید هر نقطه از خط را با یک عدد حقیقی متناظر کنیم چنانکه هیچ دو نقطه‌ای به یک عدد منسوب نشده باشند تا با در

دست داشتن یک عدد بتوانیم نقطه‌ای را که–احتمالاً–به آن منسوب شده است پیدا کنیم. این کار را هم به روش‌های بی‌شماری می‌توان انجام داد. ساده‌ترین آنها تبدیل خط راست به محور مختصات است. برای این کار شما باید یک نقطه از خط را به عنوان مبداء، یکی از دو جهت خط را به عنوان جهت مثبت و طول یک پاره خط دلخواه را به عنوان مقیاس در نظر بگیرید. اکنون قدر مطلق عدد منتسب شده به هر نقطه از خط عبارت از نسبت فاصله‌ی آن نقطه از مبداء به طول مقیاس است. علامت آن هم بسته به اینکه در کدام طرف مبداء قرار گرفته باشد بنا بر قرارداد مثبت یا منفی است.

می‌توان نشان داد که اگر خط ما راست هم نباشد باز هم هر نقطه روی آن را با یک پارامتر می‌توان به دست آورد. چنین است برای خط شکسته، منحنی بسته،و یا چند خط متقاطع. در تمام این موارد نقاط بر روی خطوط از درجه‌ی آزادی یک برخوردارند و تنها می‌توانند در یک جهت سر بخورند، در واقع آنها در دو جهت می‌توانند حرکت کنند: پس و پیش. البته در نقاط تقاطع تعداد گزینه‌ها بیش از دو است ولی در چنین ساختارهایی درجه‌ی آزادی یک نقطه هرگز از یک فراتر نمی‌رود. این بدان معنا است که نقطه‌ای که بر روی چنین فضایی زندانی شده باشد هرگز نمی‌تواند در فضایی بیش از تک‌بعد–هرچند بسیار کوچک–حرکت کند، آن چنان که یک نقطه واقع بر سطح یک کره می‌تواند.

با تعمیم نکته‌ای که گفته شد در می‌یابیم که بر یک صفحه‌ی تخت بی‌کران (اقلیدسی) و یا هر سطح دوبعدی دیگر (سطح یک چنبره، چند کره‌ی متحدالمرکز و یا صفحات یک کتاب) می‌توان یک نقطه را با دو پارامتر (عرض و طول، شعاع و فاز یا زوج‌های دیگر) مشخص کرد. این در واقع محکم‌ترین دلیل برای این است که ما چنین سطوحی را دوبعدی بدانیم. به همین ترتیب و در حالت کلی معرفی کردن نقطه‌ای در یک فضای n بعدی دست کم به تعداد n پارامتر نیاز دارد و اگر ما چنین فضاهایی را n بعدی می‌نامیم به همین دلیل است.

تعیین یک فضای اقلیدسی در فضای مرجع

از قضایا می‌دانیم که در یک فضای اقلیدسی n بعدی دقیقاً یک فضای اقلیدسی n بعدی وجود دارد و آن هم خودش است. اما اگر تعداد ابعاد فضای دوم کمتر شود، بی‌شمار از آن در

فضای بزرگ‌تر می‌گنجد. اکنون ما به دنبال آن هستیم که حداقل با چند پارامتر می‌توانیم یک فضای اقلیدسی را در یک فضای دیگر مشخص کنیم. برای این کار پیش از هر کار روشی را که برای معرفی کردن نقطه در نظر داریم بیان می‌کنیم.

یکی از راه‌های تعیین یک فضای k بعدی دلخواه در یک فضای n بعدی استوار کردن آن بر کوچک‌ترین مجموعه‌ی نقاطی است که بتواند آن فضا را مشخص و تثبیت کند. از اصل موضوعه‌ی نخست می‌دانیم که هر k+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای k−۱ بعدی یک و تنها یک فضای k بعدی را مشخص می‌کنند. از اصل دوم نیز داریم که بر هر شکل k بعدی دست کم k+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای k−۱ بعدی وجود دارد. اکنون باید در فضای k بعدی که هدف تعیین موقعیت آن است، k+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای k−۱ بعدی – که بنا بر اصل دوم قطعاً وجود دارند– را تعیین کنیم. با در دست داشتن این مجموعه‌ی نقاط به گفته‌ی اصل نخست فضای k بعدی یادشده که تنها فضای k بعدی گذرنده از آن نقاط است مشخص می‌شود. این روش روشی قطعی برای معرفی کردن یک فضای دلخواه k بعدی در فضایی n بعدی می‌باشد.

چنانکه گفته شد شمار پارامترهای لازم و کافی برای معرفی هر نقطه در یک فضای n بعدی برابر با n است. هر یک از k+۱ نقطه‌ی مذکور هم در یک فضای n بعدی تعریف می‌شوند پس برای تعیین تک تک نقاط این مجموعه تعداد n(k+۱) پارامتر لازم و کافی است در حالی که این تعداد برای تعیین فضای k بعدی داده شده کافی است و مشخص نیست که آیا به همه‌ی آنها نیاز هست یا آنکه می‌توان در روشی دیگر تعداد پارامتر کمتری را برگزید. می‌توان گفت که در حالت کلی این تعداد پارامتر برای این منظور لازم نیست. یک مثال نقض بسنده می‌کند:

برای مشخص کردن یک خط راست در یک صفحه‌ی اقلیدسی دو پارامتر لازم و کافی هستند. این دو پارامتر می‌توانند به صورت یک زوج مانند شیب و عرض از مبداء، طول از مبداء و زاویه با محور طول‌ها، فاصله‌ی خط از مبداء و زاویه‌ی آن با نیمساز ربع اول و سوم، و یا بی‌شمار زوج دیگر داده شوند. از اینجا در می‌یابیم که برای معرفی یک فضای تک‌بعدی در یک فضای دوبعدی دو پارامتر لازم و کافی وجود دارد. این در حالی است که عبارت n(k+۱) با توجه به مقادیر k=۱ (برای خط) و n=۲ (برای صفحه) عدد ٤ را بر می‌گرداند. این نشان دهنده‌ی آن است که در برخی از حالات معرفی یک فضا بر اساس تعریف تک تک نقاط یک گروه نقطه‌ی گذرنده از آن علی رغم راحتی از نظر تعداد پارامترها بهینه نیست و گاه پارامترهای بیش از حد

نیاز را به کار می‌بندد. این به معنای آن است که در این روش برخی از پارامترها دور ریخته می‌شوند. توجه داشته باشید که دور ریخته شدن برخی از پارامترها به معنای هدر رفتن کلی پارامترها است نه اضافی بودن چند تای مشخص از آنها. برای نمونه هنگامی که شما یک خط را بر روی یک صفحه نه بر اساس دو پارامتر شیب و عرض از مبداء (مانند a و b در معادله‌ی b+y=ax) بلکه بر اساس دو نقطه‌ی دلخواه واقع بر خط (مانند x_1، x_2، y_1 و y_2 در $(y-y_1)/(y_2-y_1) = (x-x_1)/(x_2-x_1)$) تعریف می‌کنیم، به جای دو پارامتر از چهار پارامتر استفاده کرده‌ایم و به اندازه‌ی دو پارامتر اسراف نموده‌ایم. اما این به آن معنا نیست که دو پارامتر مشخص از این چهار تا مثلاً x_2 و y_1 اضافی هستند و با حذف آنها باز هم می‌توان خط را بر اساس دو پارامتر باقی‌مانده تعریف کرد. این برداشت کاملاً نادرست است و در این روش هر چهار پارامتر مورد نیاز هستند. منظور از اضافه بودن دو پارامتر این است که در مجموع اطلاعات مورد نظر ما که در دو پارامتر قابل بیان هستند، اکنون در قالب یک گروه چهار پارامتری بیان شده‌اند. برای آنکه از شمار این پارامترها کاست هیچ راهی وجود ندارد مگر تعویض روش تعریف مکان یک خط در یک صفحه. مادامی که روش ما از نشر شمار پارامترها بهینه نیست (مانند معرفی خط بر اساس دو نقطه‌ی گذرنده از آن) هر چهار پارامتر هم مورد نیاز ما هستند.

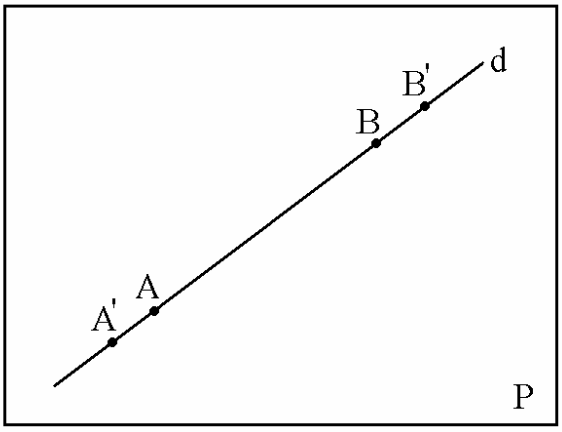
قانون کاهش پارامتر

برای یافتن تعداد پارامترهای لازم و کافی برای معرفی یک فضا در فضای مرجع (شمار پارامترهای به کار گرفته شده در روش بهینه) می‌توانیم تعداد پارامترهای هدر رفته را در روش گروه نقاط پیدا کرده و آن را از مجموع $n(k+1)$ کم کنیم. برای این کار باید از یک قانون بهره بگیریم. این قانون که آن را بدون اثبات می‌پذیریم به علت آنکه به دلایل گفته شده در آغاز بخش از قرار دادن آن در زمره‌ی اصول موضوعه اجتناب می‌کنیم به نام قانون و نه اصل بیان شده است:

اگر یک شکل k بعدی بر حسب تعریف نقاط تعریف شود، برای هر نقطه که در یک فضای m بعدی آزادانه حرکت می‌کند بدون آنکه بر اساس شیوه‌ی معرفی تغییری در شکل k بعدی ایجاد شود، شمار m پارامتر اضافی است.

برای فهم این قانون به مثال پیشین توجه کنید: در هنگام مشخص کردن یک خط راست در یک صفحه بر اساس تعریف دو نقطه‌ی وقع بر آن از چهار پارامتر استفاده کردیم. این در حالی بود که روش‌های بهینه از کفایت دو پارامتر هم خبر می‌دادند. این به معنای اضافه بودن دو پارامتر است. اکنون به این قانون توجه کنید. هر یک از دو نقطه‌ای که خط راست از آنها می‌گذرد می‌توانند در راستای یک خط راست (که همان خط خودمان است) نوسان کنند بدون آنکه تغییری در مکان خط ایجاد شود. چنانکه در شکل می‌بینید می‌توانیم برای مشخص کردن خط d در صفحه‌ی P به جای تعیین دو نقطه‌ی A و B نقاط A' و B' مشخص کنیم بدون آنکه خط ما تغییری کند. مشاهده می‌شود که A و B می‌توانند در راستای یک فضای تک‌بعدی نوسان کنند و باز همان خط d را به دست دهند. اکنون بر اساس قانون کاهش پارامتر به ازای هر یک از دو نقطه‌ی مذکور یک پارامتر اضافی است. این نشان دهنده‌ی همان دو پارامتر اضافی بوده و مؤید دانسته‌های گذشته‌ی ما است.

چنانکه دیدیم در این مثال خاص ما هم روش بهینه (با دو پارامتر) و هم روش غیر بهینه (با چهار پارامتر) را به دقت می‌شناختیم و از روی آنها می‌توانستیم به وجود دو پارامتر زاید پی ببریم و قانون کاهش پارامتر هم به طور هم‌زمان این تعداد را تأیید می‌کرد).می‌توان گفت که در حالت کلی این قانون می‌تواند با در دست داشتن روش غیر بهینه و تعداد پارامترهای هدر رفته، شمار پارامترهای روش بهینه- که همان شمار پارامترهای لازم و کافی برای معرفی شکل است - را به دست بدهد بدون آنکه ما به روش بهینه دست پیدا کرده باشیم.



شمارش پارامترهای روش بهینه‌ی تعریف یک فضای اقلیدسی

چنانکه گفتیم می‌توان از قانون کاهش پارامتر برای یافتن تعداد پارامترهای لازم و کافی برای معرفی یک شکل در یک فضا بهره جست. به مسأله‌ی اصلی باز می‌گردیم: چند پارامتر برای تعریف یک فضای k بعدی در یک فضای n بعدی لازم و کافی است؟

پیشتر دیدیم که معرفی نقاطی واقع بر فضای k بعدی با استفاده از n(k+۱) پارامتر در حالت کلی بهینه نیست. اگر قانون اخیر را به کار ببندیم خواهیم دید که هر یک از k+۱ نقطه‌ی تعریف شده، می‌توانند درون فضای k بعدی یادشده نوسان کنند بدون آنکه تغییری در موقعیت این فضا پیش آید. این به معنای آن است که به ازای هر نقطه k پارامتر به هدر رفته است. اگر شمار این پارامترهای هدر رفته از تعداد کل پارامترها کاسته شود، چون عنصر دیگری در تعریف فضای k بعدی در فضای مرجع n بعدی به کار نرفته است، پس شمار پارامترهای لازم و کافی در بهترین روش برای این منظور به دست می‌آید. تعداد کل پارامترهای لازم برای معرفی همه‌ی نقاط n(k+۱) و شمار پارامترهای زاید k(k+۱) است. بنابراین در نهایت شمار پارامترهای لازم و کافی عبارت است از n(k+۱)–k(k+۱) یا به عبارت دیگر (n–k).(k+۱) این پاسخ نهایی پرسش اصلی این بخش است.

معمولاً روش‌های هندسی نمی‌توانند روش‌های بهینه‌ای باشند و خواه ناخواه پارامترهای زایدی را در کار می‌آورند و از این حیث شیوه‌های صرفه‌جویانه‌ای نیستند. از این جهت تحقیق درستی عبارت فوق به روش‌های جبری خیلی آسان‌تر از روش‌های هندسی است. با نوشتن معادله‌ی جبری تعریف یک فضای اقلیدسی در فضای دکارتی می‌توان به سادگی به این عبارت رسید. مثلاً یک صفحه در فضای سه‌بعدی با معادله‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$cz+by+ax = d$$

این روش هنوز هم بهینه نیست. چنانکه می‌بینید اگر چهار پارامتر a و b و c و d را در یک ثابت ضرب کنیم باز هم تغییری در صفحه‌ی به دست آمده حاصل نخواهد شد. این امر نشانگر وجود پارامتر یا پارامترهای اضافی است. اگر این پارامترها را به یکی از خودشان (مثلا d) بخش کنیم رابطه به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$(^{a}/_{d})x + (^{b}/_{d})y + (^{c}/_{d})z = ۱ \quad \Rightarrow \quad a'x + b'y + c'z = ۱$$

سه پارامتر a/d ، b/d و c/d برای معرفی یک صفحه در یک فضای سه‌بعدی لازم و کافی هستند. این عدد از رابطه‌ی زیر هم به دست می‌آید:

$$(n-k)(k+۱) = (۳-۲).(۲+۱) = ۳$$

ممکن است راه‌های دیگری یافت که به طریقه‌ای همانند سه پارامتر را به کار گیرند، اما هرگز نمی‌توان این تعداد را کاهش داد. این در حالی است که در روش‌هایی با تعداد پارامترهای بیشتر در مصرف پارامترها زیاده‌روی شده است و امکان صرفه‌جویی همچنان وجود دارد.

شمارش پارامترهای روش بهینه‌ی تعریف یک شکل

در قانون کاهش پارامتر از یک شکل k بعدی نام برده شده و نه یک فضای k بعدی. این بدان معنا است که این قانون را برای شمارش تعداد پارامترهای لازم و کافی برای معرفی یک شکل در یک فضای مرجع نیز می‌توان به کار برد. همچنین قوانین مشابهی هستند که می‌توان از آنها برای شمارش پارامترها بهره جست.

البته در این مبحث نمی‌توان روش کلی ارائه کرد چرا که بی‌شمار شکل گوناگون می‌توانند مورد نظر ما باشند. یک مکعب مستطیل سه‌بعدی که اضلاع آن با محورهای مختصات موازی باشند در یک فضای شش‌بعدی با ۱۶ پارامتر، یک گوی k بعدی صرف نظر از آنکه در کجا قرار گرفته است در یک فضای مرجع n بعدی با یک پارامتر معرفی می‌شود و آن شعاعش است. در همین فضای مرجع یک نیم‌خط با ۲n–۱ پارامتر تعیین می‌شود. بنابراین بسته به این که شکل ما چه باشد و چه مشخصاتی از خود یا موقعیت آن داده شده باشد، شمار این پارامترها متغیر است. در اینجا تنها برای آشنایی با شیوه‌ی به‌کارگیری این قانون و قوانین شهودی مشابه در شمارش تعداد پارامترهای لازم و کافی برای معرفی یک شکل در یک فضای مرجع – البته تنها در حالت‌هایی که روش معرفی بر اساس معرفی نقاط باشد – چند نمونه آورده شده است.

تعریف یک دایره در فضای مرجع: می‌خواهیم یک دایره را در فضای مرجع n بعدی معرفی کنیم. روش‌های بی‌شماری در پیش روی ما است. در اینجا سه نمونه را ذکر می‌کنیم که هر سه به یک پاسخ منتهی می‌شوند:

می‌دانیم که از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست دقیقاً یک دایره می‌گذرد. برای تعریف یک دایره می‌توانیم سه نقطه‌ی دلخواه متمایز واقع بر آن را تعیین کنیم تا دایره به دست آید. هر نقطه در یک فضای n بعدی به n پارامتر نیاز دارد. پس در نهایت ۳n پارامتر مورد نیاز ما است. اما هر یک از این نقاط در یک فضای تک‌بعدی (منظور کمان دایره است) نوسان می‌کنند بی‌آنکه دایره جابه‌جا شود. بنابراین به ازای هر یک از آنها یک پارامتر اضافی به کار رفته است و در واقع تعداد پارامترهای روش بهینه ۳n-۳ است.

در روش دیگر نخست مرکز دایره را به عنوان یک نقطه در فضای n بعدی با n پارامتر مشخص می‌کنیم. اکنون برای مشخص کردن صفحه‌ی در برگیرنده‌ی دایره باید پارامترها را بشماریم. روشن است که این صفحه نمی‌تواند هر صفحه‌ای باشد، چرا که لزوماً باید از مرکز دایره عبور کند. به این منظور چنین استدلال می‌کنیم که هر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک استقامت یک صفحه را مشخص می‌کنند و بر هر صفحه نیز سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک راستا وجود دارد. اما این سه‌نقطه برای معرفی صفحه‌ی دایره به دو نقطه تقلیل می‌یابند چرا که یکی از آنها مرکز دایره است و معلوم می‌باشد و دو نقطه‌ی دیگر می‌توانند محل دقیق صفحه را مشخص کنند. بنابراین ۲n پارامتر مورد نیاز است. اما هر یک از این دو نقطه بر روی یک صفحه‌ی دو بعدی نوسان می‌کنند و بنابر قانون پارامتر می‌توان در نهایت چهار پارامتر از ۲n را کاست. بنابراین صفحه‌ی دایره هم ۲n-٤ پارامتر را می‌طلبد. پس از آنکه صفحه‌ی دایره و مرکز آن مشخص شد. برای رسم دایره تنها یک پارامتر لازم و کافی است. این پارامتر در آسان‌ترین شیوه می‌تواند شعاع دایره باشد. اکنون شمار پارامترهای به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا به همان تعداد ۳n-۳ برسیم:

$$n+(۲n-٤)+۱ = ۳n-۳$$

نیز می‌توان در روشی دیگر با ۳(n-۲) پارامتر صفحه‌ی گذرنده از دایره را تعیین کرد و سپس با دو پارامتر دیگر مرکز دایره را در فضای دوبعدی به دست آمده رقم زد و در نهایت با

یک پارامتر شعاع آن را تعیین کرد. این روش هم به نتیجه‌ی پیشین می‌رسد:

$$۳(n-۲) +۲+۱ = ۳n-۳$$

تعریف یک مکعب نامایل در فضای مرجع: یک مکعب k بعدی به تنهایی و با چشم‌پوشی از موقعیت قرار گرفتنش با یک پارامتر مشخص می‌شود. برای نمونه طول اضلاع (که با هم برابرند)، طول بزرگ‌ترین قطر و برای مقادیر $k>۱$ سطح جانبی وجوه (حجم درجه‌ی دو زیرمکعب‌های دوبعدی) را می‌توان قرار داد کرد. اما اینکه این مکعب در کجای فضای مرجع و با چه زاویه‌ای قرار گرفته باشد، مسأله را پیچیده‌تر می‌کند. البته در اینجا همه‌ی حالت‌های قرار دادن یک مکعب را در فضای مرجع بررسی نمی‌کنیم چرا که مکعب ما نامایل است، بدین معنا که اضلاع آن با محورهای قائم فضای مرجع موازی است.

برای حل مسأله با این شرایط یک راه پیشنهادی آن است که نخست خود مکعب با یک پارامتر مشخص شود. سپس برای تعیین موقعیتش در فضای مرجع n بعدی مرکز آن با n پارامتر تثبیت شود. در گام بعدی باید فضای حامل این مکعب به دست آید. با داشتن این فضای حامل و دانستن مکان دقیق مرکز مکعب با توجه به اینکه مکعب نمی‌تواند مایل باشد، موقعیت دقیق آن مشخص می‌شود. برای درک بهتر یک مربع با طول ضلع و مرکز ثابت را در یک صفحه در نظر بگیرید. روشن است که مربعی با این شرایط یگانه و معلوم است. اکنون فضای حامل k بعدی مذکور را معرفی می‌کنیم. با داشتن یک نقطه‌ی معلوم از این فضا نیازمند تعدادی پارامتر دیگر هستیم. در اینجا نیز می‌توانیم k نقطه‌ی دیگر را با nk پارامتر تعیین کنیم. این $k+۱$ نقطه‌ی حاصل فضای حامل مکعب را به دست خواهند داد. البته هر یک از k نقطه‌ی غیر ثابت در یک فضای k بعدی نوسان می‌کند و بر اساس قانون کاهش پارامتر تعداد پارامترهای اضافی $k\times k$ است و تعداد پارامترهای لازم و کافی برای مشخص کردن فضای حامل k بعدی مکعب دقیقاً $k(n-k)$ است. اگر این شمار را با n پارامتر لازم برای یافتن مرکز مکعب و یک پارامتر معرف ابعاد آن جمع بزنیم پاسخ نهایی مسأله که عبارت است از $nk-k^۲+n+۱$ به دست خواهد آمد.

تعریف یک مثلث قائم‌الزاویه در فضای مرجع: در اینجا نیز سه روش به کار می‌بندیم، اما هیچ یک از آنها به طور مستقیم قانون کاهش پارامتر را به کار نمی‌گیرند:

در روش نخست پیش از هر چیز دو پارامتر را برای مشخص شدن خود مثلث به کار می‌بریم. این دو می‌توانند طول دو ضلع قائمه، طول وتر و یک زاویه‌ی حاده، طول ارتفاع و نیمساز زاویه‌ی قائمه و بسیاری از زوج‌های دیگر باشند. سپس صفحه‌ی دربرگیرنده‌ی مثلث قائم‌الزاویه را مشخص می‌کنیم. این صفحه مانند هر فضای دو بعدی در یک فضای مرجع n بعدی نیازمند ۳n−۶ پارامتر است. با مشخص شدن این صفحه مکان قرار گرفتن نقاط روشن می‌شود. در پایان هم باید موقعیت دقیق این مثلث در صفحه‌ی به دست آمده مشخص شود. این کار هم با سه پارامتر انجام می‌شود. دو پارامتر برای تعیین مکان دقیق گرانیگاه مثلث در صفحه و سومی برای تعیین زاویه‌ی چرخش آن (مثلاً زاویه‌ی وتر با یک خط ثابت روی صفحه) به کار می‌روند. به این ترتیب در مجموع ۳n−۶+۲+۲+۱ یا ۳n−۱ پارامتر مورد نیاز است.

در شیوه‌ی دیگر سه رأس مثلث را با ۳n پارامتر تعیین می‌کنیم. البته واضح است که این سه رأس در حالت کلی یک مثلث دلخواه را به دست می‌دهند و یک مثلث قائمه مثلثی دلخواه است با این تفاوت که یکی از پارامترهای آن یعنی یکی از زوایای باید قائمه باشد. این پارامتر معلوم نشان دهنده‌ی این است که یکی از پارامترها زاید است و باید حذف شود. البته این قانون بسیار کلی‌تر از آن است که به عنوان یک اصل بیان شود و از سوی دیگر قابل اثبات بر اساس اصول پیشین هم نیست. پس شهوداً آن را به کار می‌گیریم. اینکه یک مثلث قائم‌الزاویه به علت مشخص بودن یک پارامترش همواره در شرایط مشابه یک پارامتر کمتر از یک مثلث دلخواه را می‌طلبد به ما اجازه می‌دهد که از مجموع ۳n پارامتر یکی را بکاهیم و به همان نتیجه‌ی ۳n−۱ برسیم. این پارامتر معلوم برای مثلث قائم‌الزاویه می‌تواند قائمه بودن یکی از زوایا باشد و یا وجود دقیقاً یک رابطه‌ی محدودکننده به نام رابطه‌ی فیثاغورث باشد. چیزی که مسلم است این است که از هر طریقی که عمل کنیم یک پارامتر از مجموع پارامترهایمان کاسته خواهد شد.

در روش دیگر نخست وتر مثلث را با تعیین دو رأس‌اش و با ۲n پارامتر مشخص می‌کنیم. اکنون از نقطه‌ی وسط وتر به شعاع نصف آن گوی n بعدی ترسیم می‌کنیم. این گوی مکان هندسی نقاطی از فضای مرجع است که از وسط وتر به فاصله‌ی ثابت نصف آن هستند و دو رأس وتر را هم در بر می‌گیرد. اکنون به جز این دو رأس یک نقطه‌ی دلخواه روی این گوی انتخاب کرده و صفحه‌ی گذرنده از آن نقطه و دو سر وتر را رسم می‌کنیم. این هر سه نقطه بر روی گوی قرار داشته و از مرکز گوی به یک فاصله هستند. پس مرکز یگانه دایره‌ای که از این

سه نقطه می‌گذرد باید همان وسط وتر باشد چون در غیر این صورت با دایره‌ای با دو مرکز روبه‌رو هستیم و این محال است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که وتر مثلث قطر این دایره است و زاویه‌ی محاطی رو به آن قائمه است. این به معنای آن است که مثلثی که یک ضلعش قطر گوی و رأس دیگرش روی گوی قرار داشته باشد، مثلثی قائم‌الزاویه است. از سوی دیگر می‌توان نشان داد رأس قائم هر مثلث قائم‌الزاویه روی گویی به قطر وتر آن قرار دارد چرا که در غیر این صورت سه رأس مثلث از پای میانه به یک فاصله نبوده و مثلث قائم نخواهد بود. از این استدلال‌ها نتیجه می‌گیریم که برای مشخص کردن یک مثلث قائم‌الزاویه با داشتن وتر آن می‌توانیم رأس سوم را روی پیرامون گوی n بعدی به قطر آن وتر پیدا کنیم. پیرامون یا سطح یک گوی n بعدی دارای n−۱ بعدی بعد است و بر این اساس نقطه‌ی سوم با n−۱ پارامتر مشخص می‌شود. با جمع کردن عدد n−۱ (برای رأس قائمه) با عدد ۲n (برای وتر مثلث) همان مقدار ۳n−۱ گذشته آشکار می‌شود.

چنانکه دیدید روش‌های گوناگون همواره به یک پاسخ منتهی می‌شوند. قوانینی که در این روش‌ها به کار گرفته می‌شوند، قوانینی کلی و شهودی هستند و چنانکه در آغاز بخش هم گفته شد خارج از محور منطقی و اثباتی کتاب قرار می‌گیرند. طبقه‌بندی دقیق این قوانین مجالی دیگر را می‌طلبد و از حوصله‌ی بحث هندسه‌ی ابعاد خارج است. در این بخش تنها جایی که این مبحث با ابعاد گره می‌خورد مورد بحث اجمالی قرار گرفت.

۶

روی دیگر سکه، جنبه‌ی غیر هندسی ابعاد

همانگونه که در اثبات قضایای این کتاب دیدید، گزاره‌ها تک تک بر روی یکدیگر استوار گشتند و کوشش شد که بنای عقلی که در مهندسی آن گام به گام پیشرفته بودیم، تا حد امکان بدون خلل باشد. تنها گزاره‌هایی که بدون اثبات پذیرفته شده بودند، اصول موضوع انگشت شماری بودند که بدیهیات هندسه‌ی مسطحه و فضایی اقلیدس را نیز باید بدانها افزود. این که گزاره‌های یادشده خود تا چه اندازه بر پایه‌ی شواهد تجربی استوارند و آیا به تنهایی و بدون بهره‌گیری از حواس قابل دستیابی هستند یا نه، خود گفتاری دیگر را می‌طلبد. در اینجا تنها می‌گوییم که با چشم‌پوشی از این شبهه، تمامی گزاره‌هایی که به آنها دست پیدا کردیم، گزاره‌هایی ساختگی بودند و تضمینی برای آنکه به محک تجربه گذارده شوند، وجود ندارد. اینجا است که یک شخص خرده‌گیر به آسانی می‌تواند بگوید بدیهیاتی را که اقلیدس یا پیروانش بیان کرده بودند، مشاهدات روزمره‌ی آنها را توجیه می‌کرد، اما بدیهیاتی که مرزهای ابعاد را در هم می‌نوردد، به کلی ارزش بحث ندارند و نمی‌توانند برقرار باشند. این فرد می‌تواند بگوید این که ریاضیات را دانشی انتزاعی دانسته‌اند بدان معنا نیست که قوانین ریاضی به هر گونه‌ی دلخواه می‌توانند انتزاع شوند. خواه ناخواه قوانین ریاضیات باید توجیه‌کننده‌ی رویدادهای پیرامون ما

باشند و چنین نیز هست.

در واقع این شخص تا اندازه‌ای حق دارد. شاید اگر اقلیدس در نیافته بود که باید مسیر خانه تا مدرسه‌ی سلطنتی اسکندریه را باید به خط راست بپیماید تا به هنگام به کلاس درس خود برسد، هرگز با این اطمینان نمی‌گفت که کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه خط راست است. ولی ما این را که بر هر فضای n بعدی دست کم n+۱ نقطه غیر واقع بر یک فضای n−۱ بعدی وجود دارد، هرگز نیازموده‌ایم. نیز هنگامی که ما روی کاغذ حجم یک مکعب مستطیل را بر حسب ابعاد آن به دست می‌آورید، شاید در جیب‌مان یک قوطی کبریت هم وجود داشته باشد که بر درستی محاسبات‌مان مهر تأیید بزند. اما وقتی که از حجم یک قطاع کروی گوی دوازده‌بعدی سخن به میان می‌آوریم، یک دیوانه نیز می‌تواند به آسانی دست‌مان انداخته و خواستار اثبات عملی گفته‌هایمان شما شود؛ خواسته‌ای که هرگز تحقق نخواهد یافت. اکنون باید این واقعیت نه چندان شیرین را بپذیریم که تعمیم‌هایی که در اصول بدیهی هندسه‌ی ابعاد صورت پذیرفت، تعمیم‌هایی ناشیانه از روابط پذیرفته شده‌ی خط و نقطه و صفحه در هندسه‌ی اقلیدسی بودند به فضاهایی چندبعدی که احتمالاً تا کنون هیچ چشم و گوشی آنها را درک نکرده است. اما در این مورد دفاعیه‌ای هم وجود دارد:

هر چند ممکن است هرگز از گزاره‌های به دست آمده در این کتاب کاربردی استخراج نشود، این به معنای آن نیست که این گزاره‌ها می‌توانستند به گونه‌ای دیگر به دست آیند. چنانکه گفتیم فرآیند اندیشیدن هر چند که بر پایه‌ی روابط مواد سه‌بعدی استوار است، اما خود فرآیندی است – احتمالا – مستقل از مکان و با مجموعه‌ای از روابط قابل مدل‌سازی است. یک مغز دوبعدی و یک مغز پنج‌بعدی (با فرض وجود) هر یک برای خود روابط ریاضی می‌تراشند که ممکن است بین این دو مغز بسیار هم متفاوت باشند، اما این تفاوت بدون تردید به تعداد ابعاد ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آنها بستگی ندارد. تا ساختار مغز ریاضیدانان چنین است، قوانین ریاضی هم مدل‌سازی‌هایی همواره درست‌اند، خواه به محک تجربه گذارده شوند و خواه نه.

در این بخش خواهیم دید که اگر فضاهای چندبعدی به راستی وجود داشته باشند، چگونه فضاهایی هستند و در آنها با چه پدیده‌هایی روبه‌رو خواهیم بود. ممکن است خیال‌پردازی باشد، اما خالی از لطف نیست. اگر راهی وجود داشته باشد که احساس موجودات فرابعدی را به ما منتقل کند، آن راه بدون تردید همین راه خواهد بود.

هیبریداسیون فرابعدی

در مبحث هیبریداسیون شیمی بخش‌هایی ویژه‌ی بررسی زاویه‌ی بین پیوندهای اتم مرکزی با اتم‌های اطراف است. مولکول‌هایی چون BeF_2 که در آنها اطراف اتم مرکزی دو اتم همسان وجود دارد و جفت الکترون غیرپیوندی ندارند و به بیان بهتر هیبرید sp دارند، خطی بوده و دارای زاویه‌ی پیوندی 180° می‌باشند. اگر هیبرید sp_2 باشد (مانند مولکول BF_3 اتم مرکزی با سه اتم مشابه پیوند برقرار کند)، آنگاه به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع (هرم منتظم دوبعدی) هستند و زاویه‌ی پیوندشان برابر با 120° خواهدبود. نیز مولکول‌هایی چون متان (CH_4) که در آنها چهار اتم همسان در اطراف اتم مرکزی وجود دارد و فاقد جفت الکترون آزاد هستند دارای هیبرید sp_3 شکل چهاروجهی منتظم (هرم منتظم سه‌بعدی) و زاویه‌ی پیوندی برابر با $109^\circ 28'$ می‌باشند. برای هیبریداسیون بیش از sp_3 مولکول حالت غیرقطبی خود را حفظ می‌کند، ولی تقارن اتم‌های اطراف اتم مرکزی نسبت به یکدیگر از بین می‌رود. در این حالت پایدارترین ساختار مولکول مربوط به هنگامی است که دو اتم در رؤوس دو هرم منتظم با قاعده‌ی مشترک قرار گیرند و بقیه‌ی اتم‌ها چند ضلعی منتظمی را بسازند که همان قاعده‌ی مشترک می‌باشد. البته این ساختار در فضای سه‌بعدی پایدارترین آرایش ممکن است، ولی اگر محدودیت‌های ناشی از ابعاد نبود چنین مولکول‌هایی به شکل هرم‌های منتظم فرابعدی در می‌آمدند. برای نمونه IF_7 که هیبرید sp_3d_3 دارد، در یک فضای شش‌بعدی به شکل یک هرم شش‌بعدی منتظم شکل می‌گرفت. حتا اگر همین مولکول متان را هم در یک صفحه زندانی کنیم، چیزی به جز یک صلیب با چهار ضلع برابر و چهار زاویه‌ی راست نمی‌سازد.

در یک فضای n بعدی پایدارترین آرایش مولکول متقارن XY_{n+1} هنگامی شکل می‌گیرد که اتم‌های Y از اتم X به یک فاصله باشند و نیز فاصله‌ی بین هر دو اتم Y از یکدیگر مقداری ثابت باشد. از سوی دیگر می‌دانیم که n+1 نقطه نمی‌توانند بیش از یک فضای n بعدی را مشخص کنند. این در حالی است که اتم X در فضای حامل اتم‌های Y قرار دارد، بنابراین یک گوی n بعدی که X در مرکز آن است و n+1 اتم Y بر روی آن هستند را در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که فاصله‌ی هر دو اتم Y از یکدیگر مقداری ثابت باشد. اینک برای به دست آوردن زاویه‌ی پیوندی مولکول XY_{n+1} قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه: گوی n بعدی به مرکز O را در نظر می‌گیریم. n+۱ نقطه‌ی A_i را روی آن گوی چنان قرار می‌دهیم که برای هر i و j متمایز، طول A_iA_j مقداری ثابت باشد. اینک داریم:

$$\forall\ i, j : \theta = \angle A_iOA_j = \mathrm{ArcCos}\ {}^{-1}/_{n}$$

برهان: در فرض آمده است که برای هر i و j ($i \neq j$) طول‌های OA_i و OA_j با هم برابرند. همچنین طول A_iA_j هم مقدار ثابتی است. بنابراین مثلث‌های ΔA_iA_j به حالت سه ضلع با هم برابرند و زوایای متناظر $\angle A_iOA_j$ مقدار ثابتی دارند. اکنون این مقدار را θ نامیده و به روش برداری آن را به دست می‌آوریم:

در آغاز بردارهای برابر OA را در نظر گرفته و یکای سنجش طول را همان درازای این بردارها می‌گیریم (در واقع شعاع گوی را یک فرض می‌کنیم). به خاطر تقارن نقاط A_i نسبت به هم مجموع این بردارها برابر با صفر می‌باشد:

$$OA_۱ + OA_۲ + OA_۳ + \ldots + OA_n + OA_{n+۱} = ۰$$

$$OA_{n+۱} = -(OA_۱ + OA_۲ + OA_۳ + \ldots + OA_n)$$

اکنون طرفین برابری را در بردار $OA_{n+۱}$ ضرب درونی (اسکالر) می‌کنیم:

$$OA_{n+۱}.OA_{n+۱} = -(OA_۱ + OA_۲ + OA_۳ + \ldots + OA_n).OA_{n+۱}$$

$$OA_{n+۱}.OA_{n+۱} = -OA_۱.OA_{n+۱} - OA_۲.OA_{n+۱} - \ldots - OA_n.OA_{n+۱}$$

$$۱ = -۱\times۱\times\mathrm{Cos}\ \theta - ۱\times۱\times\mathrm{Cos}\ \theta - \ldots - ۱\times۱\times\mathrm{Cos}\ \theta$$

$$۱ = -n.\mathrm{Cos}\ \theta$$

$$\mathrm{Cos}\ \theta = -۱/n$$

اما θ زاویه‌ی بین دو بردار است و $۰\leq\theta\leq\pi$ می‌باشد، پس:

$$\theta = \angle A_iOA_j = \text{ArcCos}\ ^{-۱}/_n$$

مقدار θ به دست آمده همان زاویه‌ی پیوند در مولکول $XY_{n+۱}$ است. برای مقایسه‌ی این فرمول با نتایج تجربی در جدول صفحه‌ی بعد اندازه‌ی زوایای پیوندی هیبریدهای متقارن با ذکر نمونه آمده است:

هیبریداسیون	شکل هندسی	زاویه‌ی پیوند	نمونه
sp	خطی	۱۸۰° = ArcCos−۱/۱	$BeH_۲$, $BeCl_۲$
$sp_۲$	مثلثی (مسطح)	۱۲۰° = ArcCos−۱/۲	$BH_۳$, $AlCl_۳$
$sp_۳$	چهاروجهی منتظم	۱۰۹° ۲۸′ = ArcCos−۱/۳	$SiH_٤$, $CF_٤$

از فرمول گفته‌شده می‌توان نتیجه گرفت که مثلاً اگر اتم $PCl_۵$ در یک فضای سه‌بعدی زندانی نبود، اتم‌های کلر آن در رؤوس یک هرم چهاربعدی منتظم با زاویه‌ی پیوند ArcCos(−۱/۴) = ۱۰٤° ۲۸′ قرار می‌گرفتند. این در حالی است که شکل هندسی این مولکول در جهان سه‌بعدی ما یک شش‌وجهی است که اتم‌های آن نسبت به هم تقارن کامل ندارند.

موهایی سنگین‌تر از جمجمه

بادکنکی را در نظر بگیرید که به اندازه‌ی کافی بعد داشته باشد (تعداد ابعاد آن (n) زیاد باشد!) اینک بادکنک را باد می‌کنیم. حجم درجه‌ی n جدار بادکنک مفروض را اندازه می‌گیریم. بر خلاف انتظار مقدار به دست آمده بسیار بسیار بیشتر از حجم هوای داخل بادکنک است. این پدیده یکی از ویژگی‌های فضاهای فرابعدی است که هر چه تعداد ابعاد آنها بیشتر می‌شود، این ویژگی آشکارتر می‌گردد. اینک با به‌کارگیری محاسبات ریاضی این پدیده را توجیه می‌کنیم:

دو گوی n بعدی هم مرکز با شعاع‌های R و R−ε را در نظر می‌گیریم:

$$\forall \varepsilon > ۰ : \lim_{n\to\infty} \frac{V_n(R-\varepsilon)}{V_n(R)} = \left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^n = \left(۱-\frac{\varepsilon}{R}\right)^n = ۰$$

بنابراین حد نسبت حجم دایره‌ی درونی با شعاع $R-\varepsilon$ به حجم دایره‌ی بیرونی با شعاع R به ازای هر $\varepsilon > ۰$ هنگامی که n زیاد شود برابر با صفر است. اکنون اگر رابطه‌ی به دست آمده را تفضیل نسبت در مخرج نماییم نتیجه می‌شود که همچنین نسبت حجم گوی درونی به حجم جداره به صفر میل می‌کند.

برای نمونه در مورد یک سیب هزار بعدی با قطر ۱۰ cm و پوسته‌ای به ضخامت ۱ mm ، نسبت حجم پوسته به حجم درون سیب نزدیک به ۶×۱۰^{۸} (ششصد میلیون) برابر است. نیز در چنین فضایی موهای یک شخص میلیاردها برابر سر او وزن دارند. مشکل دیگری که برای اهالی این جهان وجود دارد، این است که هنگامی که می‌خواهند وزن واقعی خود را بدانند باید لباس‌های‌شان را در بیاورند و بر خلاف ما نیازی به دفع ندارند!

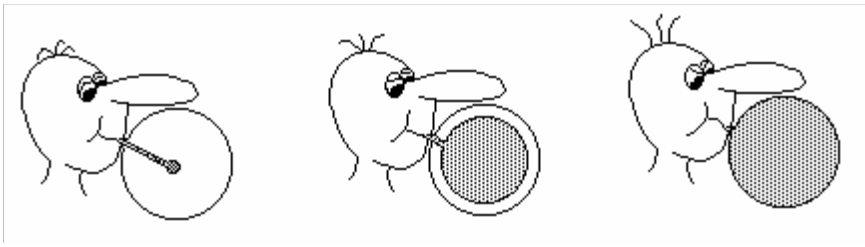
نکته‌ی قابل توجه در مورد زندگی کردن در ابعاد زیاد این است که اگر جهانی بسیاربعدی وجود داشته باشد و ارگانیسم‌هایی نیز وجود داشته باشند که با آن جهان سازگار باشند و بتوانند در آن زندگی کنند، آنها به موجودات زنده‌ی جهان سه‌بعدی ما هیچ شباهتی نخواهند داشت و حیات در یک فضای بسیاربعدی کاملاً متفاوت با زندگانی در کره‌ی زمین است. دلیل این امر آن است که انرژی مورد نیاز برای سوخت و ساز جانوران بسیاربعدی نمی‌تواند از درون بدن آنها فراهم شود، زیرا درون بدن آنها جرم بسیار ناچیزی از بدن آنان را تشکیل می‌دهد و این

مقدار ناچیز نمی‌تواند انرژی لازم برای جابه‌جایی پوسته‌ی سنگین وزنشان را تأمین کند. به طور کلی در چنین جهانی یک قانون پدیدار می‌شود و آن این است که: *در یک جهان بسیاربعدی هیچ منبع انرژی نمی‌تواند حرکت کند، مگر آن که پوسته‌اش را بسوزاند.*

به بیانی دیگر موجودات نامبرده یا می‌توانند در هنگام حرکت از انرژی منابع ساکن پیرامونشان بهره گیرند و یا این که برای کسب انرژی پوستشان را بسوزانند.

در مثال باد کردن بادکنک ممکن است که این تناقض برای خواننده به وجود آید که هر بادکنکی را می‌توان بیش از حجم جداره‌اش باد کرد، یعنی حتا در فضاهای بسیاربعدی هم ممکن است که حجم داخل بادکنک‌ها از حجم پوسته‌ی آنها بیشتر باشد. در پاسخ باید گفت که در فضاهای بسیاربعدی با زیاد شدن شعاع بادکنک به خاطر ثابت‌ماندن حجم پوسته ضخامت آن بسیار کم می‌شود. برای نمونه در یک فضای پانصدبعدی اگر قطر یک بادکنک از ۵۰ cm به

cm ۵۱ برسد، قطر جداره‌اش از یک سانتی‌متر به نیم میکرون خواهد رسید. بنابراین در یک فضای بسیاربعدی یک بادکنک پیش از آن که به اندازه‌ی حجم پوسته‌اش باد شود، می‌ترکد. اینک باز این سؤال پیش می‌آید که اگر بادکنک ۵۰ سانتی‌متری مذکور را خالی کنیم چه اتفاقی می‌افتد. آیا قطر جداره‌اش به چند کیلومتر می‌رسد؟ پاسخ منفی است. فراموش نکنید که بادکنک ما به قدری کم‌باد است که می‌توان آن را خالی به حساب آورد. در واقع اگر گاز درون آن را خالی کنیم، بادکنک بی‌باد ما به شکل یک توپ توپر به قطر cm ۴۹/۹۹۹۹۹۸ در می‌آید یعنی تنها ۲۰۰ آنگستروم از قطرش کاسته می‌شود. در زیر چگونگی باد شدن یک بادکنک بسیاربعدی که حجم پوسته‌اش همواره ثابت است، نشان داده شده است:



علت اصلی این پدیده‌های غیرعادی این است که حجم درجه‌ی n یک شکل از جنس واحد طول به توان n است و وقتی n زیاد می‌شود حجم‌های به دست آمده هم نسبت به هم تغییرات به نظر اغراق آمیزی پیدا می‌کنند. برای نمونه اگر در گروهی از موجودات بسیاربعدی کمیت‌های پراکندگی قد (انحراف معیار و واریانس، انحراف میانگین، دامنه، گشتاورهای حول میانگین و ...) مانند انسان‌های سه‌بعدی باشد، شاخص‌های پراکندگی وزن یا حجم آنها بسیار متفاوت با شاخص‌های ما خواهد بود. دلیل این که پراکندگی داده‌های مربوط به وزن و حجم آنان بسیار بیشتر از داده‌های وزن و حجم ما می‌باشد، همین رابطه‌ی نمایی وزن و حجم با قد است و نیز اینکه این نما برای ما *سه* و برای موجودات بسیار بعدی *بسیار* می‌باشد.

چرا آینه بالا و پایین را عوض نمی‌کند؟

در فیزیک اپتیک در بررسی خواص آینه‌ی تخت گزاره‌ای ذکر می‌شود: *تصویر در آینه وارونه است*. بسیار شنیده‌اید که می‌گویند هنگامی که شما در برابر آینه می‌ایستید، دست راست شما نظیر دست چپ تصویرتان است. ولی هرگز نشنیده‌اید که سر شما در برابر پاهای تصویرتان است. به راستی اگر آینه چپ و راست را جابه‌جا می‌کند، پس چرا بالا و پایین را عوض نمی‌کند؟ برای پاسخ دادن به این پرسش باید بدانید که به طور کلی آینه چپ و راست را عوض نمی‌کند و این تصور که آینه چپ و راست را جابه‌جا می‌کند ریشه در این دارد که انسان یک صفحه‌ی تقارن قائم دارد که بدن او را به دو نیمه‌ی تقریباً برابر بخش می‌کند. این صفحه‌ی تقارن موجب می‌شود که شما بتوانید خود را به جای تصویرتان در آینه قرار دهید. اشکال کار هم در همین جا است. اکنون موضوع را بیشتر توضیح می‌دهیم:

تصویر شما در آینه چنان که از قضایای بخش دوم نتیجه می‌شود، با خودتان ناهمسو است. یعنی شما بر آن منطبق نمی‌شوید، مگر آنکه در فضای چهاربعدی حول صفحه‌ای چون صفحه‌ی تقارنتان ۱۸۰° بچرخید تا با آن همسو شوید. اما کسی که در برابر آینه می‌ایستد به این نکته توجه ندارد. برای او کافی است که در همین فضای سه بعدی رویش را برگرداند تا تقریباً به جای تصویرش قرار گیرد. بدیهی است که اگر خود را این‌گونه به جای تصویرتان قرار دهید، دست راست شما در برابر دست چپ تصویرتان قرار خواهد داشت. اگر محور تقارن انسان صفحه‌ای افقی بود، آنگاه او برای انطباق در تصویرش خود را نیم دور در جهتی می‌چرخانید که بالا و پایینش عوض شوند و نیز اگر انسان در هیچ راستایی تقارن نداشت، هرگز به ذهنش خطور نمی‌کرد که آینه راست و چپ و یا بالا و پایین را با هم عوض می‌کند. پس آینه در واقع هیچ دو جهتی را با هم عوض نمی‌کند و این ایراد ماست که کوشش می‌کنیم از روش‌های غیر مجاز(!) خود را به جای تصویر ناهمسویمان بگذاریم. اگر هشیار باشید با خواندن این بند پرسش دیگری به ذهنتان می‌رسد: چرا تصویر آینه‌ای واژه‌ها و جملاتی که که از هر جهت نامتقارن هستند، در برابر آینه باز هم برای منطبق شدن بر خود جمله باید از جهت چپ به راست پشت و رو شوند، نه از جهت بالا به پایین؟

پاسخ این پرسش بسیار ساده است. شما خودتان نوشته را در جهت چپ به راست می‌چرخانید. فرض کنید که کاغذی با نوشته‌ی *Dimension* و یک آینه‌ی تخت در برابر شما قرار دارد. برای اینکه نوشته را در برابر آینه قرار دهید، باید آن را پشت و رو کنید. اما همواره و ناخودآگاهانه این پشت و رو کردن را حول محوری قائم انجام می‌دهید. دلیل این امر آن است که شما مانند پرسش قبل برای خواندن این واژه خود را به جای تصویرتان می‌گذارید و این بار هم برای قرار گرفتن به جای تصویرتان ساده‌ترین راهی را که به ذهنتان می‌رسد یعنی عقب‌گرد را برمی‌گزینید. بنابراین نوشته هم باید هماهنگ با چرخش شما حول محوری قائم بچرخد. روشن است که در این حال تصویر داخل آینه Dimension بود. اما اگر انسان صفحه‌ی تقارن افقی داشت، برای اینکه به جای تصویرش (که مسئولیت خواندن واژه را بر عهده دارد) قرار گیرد، کافی بود که خود را گرد یکی از خطوط افقی موازی با آینه به اندازه‌ی یک زاویه‌ی نیم صفحه دوران دهد. در این وضعیت برای قرار گرفتن نوشته در برابر آینه به‌طوری‌که قابل خواندن برای تصویر انسان شود، باید آن هم حول محوری افقی بچرخد. پس واژه‌ی *Dimension* به صورت Dimension در می‌آید.

از مطالب بخش دوم به دست می‌آید که اگر جهان ما همچون بطری کلین بود، یک جهانگرد راست‌دست با یک بار دور زدن جهان چپ‌دست می‌شد. در رویارویی با این نمونه هم پرسش‌هایی نظیر نمونه‌های بالا مطرح می‌شوند که چرا پس از یک بار دور زدن جهان، راست و چپ این انسان با هم عوض می‌شوند، ولی بالا و پایین یا پشت و روی او جابه‌جا نمی‌شوند؟ برای توجیه این تناقض می‌گوییم که اگر این جهانگرد در یک صف پشت یک انسان دیگر بایستد، دستی که قبلاً دست راست او بوده در برابر دست چپ دیگران قرار می‌گیرد. اما در حقیقت این دست هنوز هم دست راست اوست و ما هنگامی که او را در صف گذاشتیم باز هم کاری غیر مجاز انجام دادیم. اینجا هم تقارن ما را به اشتباه انداخت. در واقع اگر تقارن جهانگرد نبود ما او را در یک صف با سایر انسانها مقایسه نمی‌کردیم. اگر بخواهیم به‌درستی اجزای بدن این جهانگرد را با همنوعانش مقایسه کنیم، باید یک دور دیگر او را در این جهان بگردانیم تا دوباره به وضعیت قبل برگردد.

این حقیقتی است که اگر انسان شکلی نسبتاً متقارن نداشت و یا چرخش در فضای چهاربعدی را درک می‌کرد، هرگز این پرسش‌ها به ذهن او خطور نمی‌کردند. در آن صورت

تصویر در آینه وارونه بود، اما نه به آن معنا که خال روی بازوی چپ شما بر بازوی راست تصویر قرار خواهد داشت. بلکه به آن مفهوم که شما هرگز نخواهید توانست با چرخش در این جهان به جای تصویر خود قرار گیرید، چرا که او ناهمسوی شما است.

قانون گرانش در فضاهای چندبعدی

هنگامی که دو جرم یکدیگر را جذب می‌کنند، به نظر می‌رسد که در رابطه‌ی علیت وقفه‌ای مکانی ایجاد می‌شود. کره‌ی زمین بدون تماس مستقیم می‌تواند یک سیب را جذب می‌کند و خورشید نیز از میلیون‌ها فرسنگ فاصله، مسیر حزمت زمین را به صورت بیضوی نگاه می‌دارد. نظریه‌پردازان و فیزیکدانان در هنگام توجیه نیروهای گرانشی و الکترومغناطیسی، برای دوری گزیدن از اصل *کنش از دور* دست به دامان ذرات حامل نیرو می‌شوند. این ذرات نامریی تا کنون مشاهده و یا اندازه‌گیری نشده‌اند. هیچ کس نیز موفق به ثبت ویژگی‌های آنها به روش تجربی نبوده است. تنها ویژگی‌هایی که ما از آنها می‌شناسیم، ویژگی‌هایی است که خود به آنها تحمیل کرده‌ایم:

ذرات حامل نیرو جرم یا بار ندارند، چرا که در هنگام وارد شدن کشش و رانش بین دو جسم، به هیچ روی جرم یا بار جابه‌جا نمی‌شود. این ذرات به سرعت بی‌نهایت گذر می‌کنند، چرا که پیغام کشش و رانش نیروها بی هیچ اتلاف وقتی بین مواد جابه‌جا می‌شوند. ذرات یادشده بر خط مستقیم سیر می‌کنند، چرا که اجرام یا بارها یکدیگر را بر خط مستقیم می‌کشند و یا می‌رانند. و آخر اینکه این ذرات حامل نیرو هستند و گویا خبر جذب شدن یا دفع شدن را برای نمونه از جرم زمین به ذرات تشکیل‌دهنده‌ی سیب اعلام می‌کنند.

تردیدی نیست که این مُدل تا هر اندازه هم که ساختگی و به دور از واقعیت باشد (هر چند که منظور ما این نیست) باز هم تاکنون مدلی کارآمد بوده است. همین امر کافی است که ما آن را به جهان خیالی چندبعدی‌مان تعمیم بدهیم.

در این گفتار قانون گرانش در جهانی n بعدی با ویژگی‌هایی مشابه به دست خواهد آمد. نیز از قوانین الکترومغناطیس و قانون‌های مشابه چشم پوشیده خواهد شد، چرا که فرمول‌های آنها در هر فضایی با فرمول‌های گرانشی یک‌ریخت هستند.

جهانی n بعدی را متشکل از ماده‌ی n بعدی[1] در نظر می‌گیریم. نیز فرض می‌کنیم که توده‌های مواد در این جهان قابل اندازه‌گیری بر حسب یکای جرم باشند. نیز وجود ذرات حامل نیرو را با همان مشخصات پیشین می‌پذیریم. به نظر می‌رسد که تا به اینجا جهانی که فرض کرده‌ایم، بسیار به جهان خودمان شباهت پیدا کرده است. تنها تفاوتی که تا کنون در مورد آن شناخته‌ایم، در مورد تعداد ابعاد این فضا است که در آن ویژگی‌های یک فضای سه‌بعدی را به یک فضای n بعدی تعمیم داده‌ایم.

جرم نقطه‌ای را که اندازه‌اش بر حسب یکای جرم برابر m است، در نقطه‌ای از این فضای n بعدی در نظر می‌گیریم. جرم m ذرات حامل نیروی گرانشی (گراویتون) را به هر سو گسیل می‌دارد.

گراویتون‌ها ذره هستند و کوانتایی می‌باشند. نیز آنها بر خط راست راه می‌پیمایند، بنابراین شمار ذراتی که به فاصله‌ی R از m هستند، تنها به m بستگی داشته و با تغییر R دستخوش تغییرات نمی‌شود. فرمولی را که اندازه‌ی شتاب گرانشی را در فاصله‌ی R از نقطه‌ی m به دست می‌دهد، می‌توان به روش تناسب به دست آورد. روشن است که این نیرو (F) با جرم m نسبت مستقیم و با مساحت گوی n بعدی به مرکز m و شعاع R نسبت عکس دارد. از سوی دیگر می‌دانیم که اندازه‌ی جرم نقطه‌ای و مساحت گوی یادشده از یکدیگر مستقل هستند و جداگانه تغییر می‌نمایند، پس می‌توان F را متناسب با حاصل‌ضرب آن دو دانست:

$$F = k.m.\frac{1}{S_n(R)} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{k.m}{n.\lambda_n.R^{n-1}}$$

اکنون با این مدل‌سازی می‌توان توجیه کرد که چرا در جهان سه‌بعدی ما شتاب گرانشی زمین (g) به نسبت عکس مجذور فاصله از مرکز زمین تغییر می‌کند: هر چه از مرکز زمین فاصله می‌گیریم، چگالی گراویتون‌های منتشر از سوی آن نیز کم‌تر شده و شتاب جاذبه‌ی زمین هم به همان نسبت کاهش می‌یابد.

نکته‌ی جالب‌تری نیز درباره‌ی فضاهای تک‌بعدی برقرار است. در چنین فضاهای خطی

[1] ماده ی n بعدی تصوری فرضی است از هر چیزی که حجم درجه ی n داشته باشد و فضای n بعدی داشته باشد.

گراویتون‌ها در یک خط راست زندانی هستند و واگراییده نمی‌شوند. از این رو چگالی آنها در هر فاصله‌ای از یک جرم معین مقداری است ثابت. این امر سبب می‌شود که شتاب جاذبه‌ی ناشی از اجرام در هر فاضله‌ای از آنها مقداری ثابت باشد:

$$F=\frac{k.m}{n.\lambda_n.R^{n-1}}=\frac{k}{n.\lambda_n}.m$$

می‌توان به طور کلی برای فضاهای n بعدی این قانون را بیان نمود: *در یک فضای n بعدی شدت میدان گرانشی ناشی از یک جرم نقطه‌ای، با توان n-۱ام فاصله از آن تغییر می‌کند.*

شاید خواننده انتظار چنین نتیجه‌ای را نداشته باشد و در اثر عادت به جهان سه بعدی گمان برد که نیروی کشش بین دو جرم ماهیتاً با عکس مجذور فاصله‌ی بین آن دو متناسب است. نکته‌ای که در اینجا باید گوشزد شود این است که چنانکه دیدیم شتاب گرانشی ناشی از اجرام بسته به فضایی که در آنها قرار دارند، تغییر می‌کند و این به دلیل درجه‌ی آزادی انتشار گراویتون‌ها است. هر چه این درجه‌ی آزادی بیشتر باشد، گراویتون‌ها بیشتر از یکدیگر واگراییده می‌شوند و توان R در مخرج افزایش می‌یابد. از اینجا به سادگی در می‌یابیم که عدد «۲» در نمای فاصله‌ی R در مخرج قانون‌های نیوتن و کولن، بستگی مستقیمی به تعداد ابعاد جهان ما داشته است و این بستگی چیزی نبوده جز آن که «۲» یک واحد از «۳» کمتر است.

دستورهای فیزیکی و اصل بقای جرم در فضاهای تک‌رویه

جهانی دو بعدی و تک‌رویه مانند نوار موبیوس را در نظر بگیرید. این جهان با جهان ما در قوانین ریاضی و منطق مشترک است ولی قوانین فیزیکی ویژه‌ی خود را دارد. خوشبختانه میان مردم دوبعدی این جهان دانشمندانی هم برای کشف این قوانین وجود دارند. این دانشمندان بر اساس یافته‌های تجربی‌شان به این نتیجه رسیده اند که ماده‌ی دوبعدی (عنصر تشکیل دهنده‌ی اجسام این جهان) هرگز آفریده نشده و نابود هم نمی‌گردد. در واقع آنها در کتاب قوانینشان اصل بقای جرم را وضع کرده‌اند. آنها همچنین موفق به کشف عنصر کمیاب‌تر از ماده‌ای به نام پادماده شده‌اند که جرم منفی دارد و بنا بر اصل بقای انرژی هنگامی که در برابر ماده‌ای با همان اندازه

قرار می‌گیرد، هر دو با هم نابود می‌شوند.

از قوانین دیگری که این موجودات کشف نموده‌اند، می‌توان دستور زیر را نام برد که اشاره به وجود میدان‌هایی مانند میدان‌های الکتریکی، مغناطیسی و گرانشی دارد. آنها خود نام این قانون را دستور میدان‌های شبه‌گرانشی دوبعدی گذاشته‌اند: *میدان‌های شبه‌گرانشی به اجسام دو بعدی که در آنها هستند، نیرویی متناسب با جرم آنها وارد می‌نمایند. اگر میدان رو به جلو باشد، جهت این نیرو برای ماده‌های دوبعدی به سمت راست و برای پادماده‌های دوبعدی به سمت چپ است.*

از دیدگاه موجودات هوشمند دوبعدی قوانین مذکور همواره بر جهانشان حکم می‌رانند تا آنکه روزی یکی از همین افراد به قصد جهانگردی و کاوش سفری دراز را آغاز می‌نماید. روشن است که او هر بار که در هنگام سفر به میدانی که سویش به جلو است می‌رسد، نیرویی او را به سمت راست می‌کشاند. او سرانجام پس از چند سال به نقطه‌ی آغاز حرکتش برمی‌گردد. ولی چنان که پیش‌تر هم گفته شد، این بار به ناهمسویش تبدیل شده است و این بار در کمال شگفتی از دستور میدان‌های شبه‌گرانشی سرپیچی می‌کند، چرا که با رسیدن به میدان نیرو می‌خواهد به سمت راست برود ولی این بار راست او در جهت چپ دیگران است. اکنون ماجرا

را از دو دیدگاه زیر بررسی می‌کنیم:

از دیدگاه خود شخص او همچنان به راست می‌رود ولی با کمال تعجب می‌بیند که دوستانش و تمامی ماده‌های دیگر که با او جهان را دور نزده‌اند در مواجهه با این میدان به سمت چپ می‌روند. در واقع معیارهای شناخت چپ و راست برای این شخص عوض شده‌اند و با معیارهای جدیدی که او برای سنجش و جهت یابی به کار می‌برد، جهان نسبت به تصویری که پیش از سفرش داشت، وارونه می‌شود.

از دیدگاه دیگران اوضاع مانند همیشه طبیعی است اما این موجود جهانگرد که پیش از سفرش مانند دیگر مواد عمل می‌کرد، پس از سفر گویا تبدیل به پادماده شده است و برعکس همه‌ی مواد که در میدان به راست منحرف می‌شوند، او به چپ انحراف پیدا می‌کند. برخی از این موجودات از او دوری می‌کنند زیرا گمان می‌کنند که شیطان در جان جهانگرد رسوخ کرده است.

در واقع با چشم‌پوشی از ناظرانی که این جهان را می‌بینند، این شخص پس از سفر برخلاف دیگر مواد و همچون پادماده‌ها (که البته در این گیتی مسطح بسیار کمیاب‌تر از موادند) به محیط واکنش نشان می‌دهد. حتا اشیاء بی‌جانی چون کوله‌بار جهانگرد که در سفر همراه او بوده‌اند نیز

چنین حالتی پیدا کرده‌اند. اکنون فرض می‌کنیم که میدان دیگری چون میدان الکتریکی در این جهان وجود دارد که بر کمیت‌هایی در این جهان دو بعدی نظیر بار الکتریکی نیرو وارد می‌کند. دیده می‌شود که علاوه بر جرم کمیت‌هایی چون بار الکتریکی هم پس از ناهمسو شدن، دستخوش تغیرات می‌شوند، مثلاً اگر این جهانگرد (یا به بیانی بهتر فضانورد) توده‌ای از اشیای دوبعدی با بار مثبت را با خود به سفر می‌برد پس از بازگشت این توده ویژگی‌های بار منفی را نشان می‌داد. این موضوع برای قطب‌های شمال و جنوب آهن‌ربا هم برقرار است.

از مطالب گفته‌شده می‌توان نتیجه گرفت که اگر جهان سه‌بعدی خود ما هم یک جهان تک‌رویه همچون بطری کلین باشد، یا به هر ترتیب اشیا بتوانند از آن خارج شده و پس از یک دوران با زاویه‌ی نیم‌صفحه دوباره در این جهان قرار گرفته و به ناهمسویشان تبدیل شوند، آنگاه اجرام مانند پادماده و بارهای مثبت همچون بارهای منفی عمل می‌کنند. یعنی قوانینی چون دستور آمپر، قانون لنز، تعیین جهت جریان در سیم داخل میدان مغناطیسی و مانند اینها از درجه‌ی اعتبار ساقط می‌شوند.

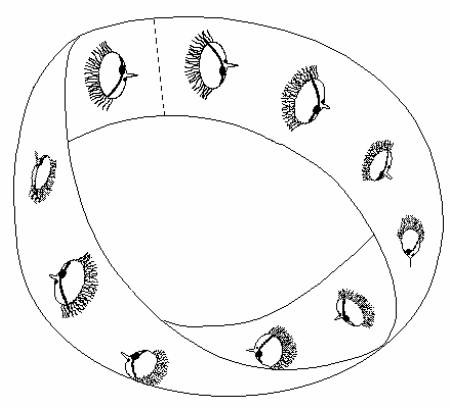
اکنون این پرسش پیش می‌آید که آیا موادی که پس از ناهمسویی مانند پادماده عمل می‌کنند به راستی پادماده‌اند؟ به بیانی دیگر آیا این پادماده‌نماها با ماده‌ی هم‌اندازه با خودشان نابود می‌گردند یا خیر؟ پاسخ دادن به این پرسش نیاز به تسلط بر فیزیک ذرات بنیادی دارد و علاوه بر این ما را از جهان خیالی ساختگیمان و ریاضیات خالصی که تا اینجا ادامه داده‌ایم، دور می‌سازد. با همه‌ی این حرف‌ها می‌توان گفت که اگر پاسخ سؤال فوق مثبت باشد، آنگاه در فضاهای تک‌رویه اصل بقای جرم برقرار نیست (حتی اگر که فیزیکدان‌های این جهان به دلیل تجربه‌ی محدودشان که ناشی از مقیاس کم آنهاست این اصل را وضع کرده باشند). برای نقض این اصل کافی است که یکی از الکترون‌های این جهان با یک بار دور زدن جهان، به پوزیترون تبدیل شود و با یکی از الکترون‌های دیگر برهم‌کنشی انجام دهد تا هر دو از صحنه‌ی گیتی خارج شوند و به جز یک ذره‌ی بسیار کوچک انرژی به‌نام فوتون چیز دیگری از آنها بر جای نماند. اما این پدیده تنها هنگامی روی می‌دهد که پوزیترون شدن یک الکترون تنها با تغییر بار و تغییر رفتارش در میدان‌های الکتریکی، مغناطیسی و گرانشی امکان‌پذیر باشد.

در بخش دوم این کتاب به همسویی و ناهمسویی کربنهای نامتقارنی اشاره شد که هر دو از جنس ماده بودند و در میدان‌های مذکور مانند هم عمل می‌کردند. در اینجا برای نمونه ایزومرهای

راست‌گردان و چپ‌گردان ($CH_3 - CHBrCl$) را در نظر بگیرید. این دو ایزومر در تمامی میدان‌ها مانند هم واکنش نشان می‌دهند و تنها در برابر نور پولاریزه اختلاف عملکرد دارند و اگر ایزومر راست‌گردان پس از سفری طولانی به ناهمسویش تبدیل شود، می‌تواند بر ایزومر چپ‌گردان منطبق شود به‌گونه‌ای‌که اتم‌های آن دو نظیر به نظیر روی یکدیگر منطبق شوند. اما در این حالت ایزومر راست‌گردان دوران‌یافته مانند پادماده عمل می‌کند در حالی که ایزومر چپ‌گردان ماده است. پس این دو ایزومر از نظر هندسی ناهمسوی همند، ولی در رویارویی با قوانین فیزیک ناهمسوی هیچ یک مانند همسوی دیگری عمل نمی‌کند.

نکته‌ی بسیار مهمی که باید به آن توجه کنید این است که سفر جهانگرد دوبعدی و یا ناهمسویی مولکول آلی سه‌بعدی قوانین تخلف ناپذیر این جهان را خدشه‌دار نمی‌کنند. در واقع این دستورات و قوانین هستند که بدون توجه به رویه‌های فضای سه‌بعدی (که تنها از دیدگاه موجودات فراتر از سه بعد قابل درک هستند) وضع شده‌اند و چنین قوانینی در توجیه برخی از پدیده‌ها که به رویه‌های جهان مربوط‌اند، ناتوان می‌باشند. اکنون موجودات دوبعدی به منظور از بین بردن این کاستی‌ها پژوهش‌های گسترده‌ای را آغاز می‌نمایند و پس از مدتی نتیجه می‌گیرند که جهان آنها یک صفحه‌ی راست نیست و در واقع یک سطح خمیده می‌باشد که یک پل مسطح ارتباطی که در جهت بعد سوم خمیده شده است دو رویه‌ی آن به هم پیوند می‌دهد. در واقع آنها کشف می‌کنند که جهان آنها جهانی خمیده و تک‌رویه است که در یک فضای اقلیدسی سه‌بعدی می‌گنجد. برخی از مناطق این جهان دارای این ویژگی هستند که اگر آنها را مستقل از بقیه‌ی جهان تصور کنیم باز هم تک‌رویه می‌باشند. این مناطق که توسط این موجودات دوبعدی متمدن *مناطق تک‌رویه* نامیده شده‌اند، سطوحی هستند که دو رویه‌ی آنها به‌وسیله‌ی یک پل ارتباطی در خودشان پیوند داده شده‌اند. از سوی دیگر در همین جهان تک‌رویه مناطق دیگری موسوم به *مناطق دورویه* هستند که چنین پلی را ندارند.

نتیجه‌ی جالبی که از این الگو گرفته می‌شود این است که اشیاء دوبعدی که در مناطق دورویه قرار دارند، دارای دو رویه هستند. اکنون اگر میدان شبه گرانشی مذکور در منطقه‌ای دورویه از این جهان واقع باشد، این میدان دو رویه دارد، که بنا به قرارداد یکی از آن دو رویه‌ی نخست و دیگری رویه‌ی دوم می‌باشد.



در اینجا ناهمسو شدن جهانگرد دوبعدی یاد شده که پیامد یک دور گردش او در جهانی تک‌رویه مانند نوار موبیوس است، به تصویر کشیده شده است. نا گفته نماند که چون این جهانگرد در آغاز از تقارن ظاهری زیادی برخوردار بود، او را در راه علم و دانش به سرنوشت دزدان دریایی دچار کرده‌ایم!

اکنون ذره‌ی جرم دوبعدی را در نظر بگیرید که تا جایی که ما می‌خواهیم کوچک است. این ذره دو ویژگی مهم دارد: نخست اینکه در یک منطقه‌ی دو رویه قرار دارد و دیگر اینکه به اندازه‌ی دلخواه ما تخت است. این دو ویژگی موجودات هوشمند دو بعدی را بر آن می‌دارد که برداری به نام *بردار جرم ذره* را برای هر ذره‌ی مادی دوبعدی تعریف کنند. راستای این بردار عمود بر سطح آن ذره و واقع بر فضای حامل سه‌بعدی جهان مذکور بوده و طول این بردار نیز با جرم ذره بر حسب یکای سنجش جرم برابر است. بدین روش می‌توان برآیند بردارهای تک تک ذرات یک جسم را که از یک انتگرال بسته به دست می‌آید، بردار جرم آن جسم نامید.

اکنون با دانستن مفهوم بردار جرم و مناطق تک‌رویه و دورویه قانون میدان‌های شبه گرانشی را به گونه‌ای تعمیم می‌دهیم که با سفر جهانگرد هم نقض نشود: *میدان‌های شبه گرانشی به اجسام دوبعدی که در آنها قرار می‌گیرند، نیرویی متناسب با جرم آنها وارد می‌کنند، یعنی اگر میدان رو به جلو باشد، جهت این نیرو برای اجسامی که بردار جرم آنها در طرف رویه‌ی نخست میدان است، به سمت راست و برای اجسامی که بردار جرمشان در طرف رویه‌ی دوم میدان است، به سمت چپ است.*

با این تعریف ماده آن چیزی است که بردار جرمش در طرف رویه‌ی نخست میدان و

پادماده آن چیزی است که بردار جرمش در سوی رویه‌ی دوم میدان باشد. یعنی جهانگرد پیش از سفر در میدان یادشده از جنس ماده بوده و پس از آن به پادماده تبدیل شده است. بنابراین در جهانی که به هر شکل امکان ناهمسو شدن وجود داشته باشد، امکان تبدیل ماده و پادماده به یکدیگر نیز وجود دارد. در چنین جهانی یک توده‌ی مادی می‌تواند پس از تبدیل شدن به پادماده، توده‌ی مادی هم‌جرم خودش را از بین ببرد، همانگونه که هنگام زاده شدن مقادیر برابر ماده و پادماده، یکی از آن دو می‌تواند پس از یک دور سفر در این جهان، به همزاد خود بپیوندد و بدین ترتیب از عدم پای به عالم وجود بگذارد. همه‌ی این گفته‌ها دال بر این است که در جهان‌های تک‌رویه اصل بقای جرم وجود ندارد.

در برابر این پدیده هرگز نباید از یاد برد که در یک منطقه یا جهان تک رویه ماده یا پادماده بودن امری کاملاً نسبی و حتا سلیقه‌ای است. در چنین منطقه‌ای روند تبدیل ماده به پادماده و برعکس آن امری ناگهانی نیست و نیز امری پیوسته هم نمی‌باشد. در واقع تعریفی که بر اساس بردار جرم در یک مکان برای ماده و پادماده گفته می‌شود، در مکان دیگر بی‌معنی است و نمی‌توان اجسام یک منطقه‌ی تک‌رویه را به دو دسته تقسیم کرد چنان که اشیاء یکی از آنها از جنس ماده و اشیاء دیگری از جنس پادماده باشند. تنها می‌توان گفت که اگر جسمی در یک منطقه از جهان مانند ماده عمل کند، ناهمسوی آن در همین منطقه همچون پادماده واکنش نشان می‌دهد. فراموش نکنید که بی‌معنی بودن مفهوم ماده و پادماده در مکان‌های گوناگون تنها برای مناطق تک‌رویه برقرار است و در یک منطقه‌ی دورویه می‌توان روی نخست و روی دوم را مشخص نموده و آنگاه بر اساس جهت بردار جرم ماده یا پادماده بودن یک شیء را شناسایی کرد.

در حقیقت از دیدگاه ریاضی ممکن است جهانی که ما در آن زندگی می‌کنیم جهانی تک رویه باشد که ناحیه‌ای دورویه از آن جولانگاه تاخت و تاز ما است. در این صورت همین ناحیه‌ی دورویه به ما اجازه‌ی افراز کردن عناصر تشکیل‌دهنده‌ی جهانمان به دو گروه ماده و پادماده را می‌دهد. حال آنکه اگر فضای مورد بررسی خود را گسترش دهیم، شاید در کهکشانی دوردست پلی یابیم که دو رویه‌ی این جهان را به هم پیوسته و مرز بین ماده و پادماده را از بین ببرد. آن زمان دیگر تمام مواد پادماده‌اند و تمام پادماده‌ها از مواد به شمار می‌روند. در واقع به هر جسمی بسته به اینکه در چه منطقه‌ی دورویه‌ای بررسی می‌شود می‌توان لقب ماده یا پاد آن را داد. در چنین جهانی می‌توان ماده‌ای را به دو نیم بخش کرد و یکی از آنها را پس از تبدیل به پادماده

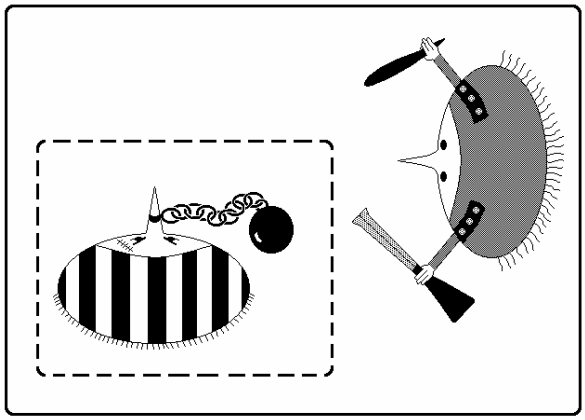
با نیم دیگر نابود کرد. در این جهان که ماده خلق می‌شود و از میان می‌رود دیگر قانون لاووازیه مبنی بر پایستگی جرم در واکنش‌ها و یا تعمیم اینشتین (اصل بقای ماده و انرژی) برقرار نیستند و تنها به صورت محلی و در مناطق دورویه برای ناظرانی چون انسان‌های محدود عرض اندام می‌کنند.

سخت‌ترین دیوارها

همان گونه که در پیشگفتار گفته شد، تجسم کردن فضاهای فرابعدی برای ما ناشدنی است. به جز این هم انتظاری نمی‌رود چون ما در جهانی سه‌بعدی زندگی می‌کنیم و هیچ یک از ما تا کنون با اجسام بیش از سه‌بعد روبه‌رو نشده‌است، اما راه‌هایی وجود دارند که ما را به درک بیشتر این فضاها رهنمون می‌شوند. در این باره خواندن مثال زیر خالی از لطف نیست:

در شکل صفحه‌ی بعد یک جهان ساده‌ی دوبعدی به نام U به چشم می‌خورد. در این جهان موجودی به نام X در چنگ عدالت گرفتار شده است. فرض را بر آن بگذارید که او توزیع‌کننده‌ی فعال مواد مخدر دوبعدی بوده و خود نیز به آن معتاد است. به هر حال نکته‌ی مورد نظر ما به اتهام آقای X بستگی ندارد و آن این است که آقای X می‌تواند بدون شکستن دیوارهای زندان از آن آزاد شود به شرطی که دیوارهای دیگری را بشکند که شکستن آنها چندان ساده به نظر نمی‌رسد. این زندانی حتا نمی‌داند که این دیوارها کجا قرار گرفته‌اند، ولی شما به عنوان یک خواننده‌ی سه‌بعدی که از بیرون نظاره‌گر این جهان مسطح هستید جای آن دیوارها را می‌دانید. البته شما نباید او را به این دلیل که نمی‌تواند از زندان فرار کند سرزنش کنید، چرا که او بیش از آن که اسیر این زندان باشد، در بند زندان مخوف‌تری است که همانا جهان U است. دیوارهایی که از آنها نام بردیم هم دیواره‌های این جهانند که راه را بر ابعاد دیگر می‌بندند. همین دیوارها هستند که باعث می‌شوند که جهان U به دو بعد محدود گردد. اکنون اگر از وجود آنها چشم بپوشیم، آقای X دیگر در جهانی دوبعدی زندگی نمی‌کند. در این حالت او می‌تواند با خروج از صفحه‌ی U ، و فرودی دوباره بر آن صفحه ولی در جایی بیرون از زندان، از آن آزاد شود. اکنون باید دید که در این مدت بر زندانبان چه می‌گذرد. روشن است که آقای Y سرگرم نگهبانی است که با صحنه‌ی شگفت‌آوری روبرو می‌شود. او مجرم را می‌بیند که ناگهان ناپدید می‌شود و پس از

چند لحظه بیرون از زندان ظاهر می‌گردد. بدون تردید نخستین پیامد این رخداد سر در گم شدن نگهبان است، زیرا او برخلاف شما نمی‌داند که در هنگامی که زندانی از دید او پنهان بوده، بیرون از جهان دوبعدی U سیر می‌کرده‌است. حدس زدن پیامدهای بعدی هم کار چندان دشواری نیست، به‌ویژه اکنون که زندانی بدون گذراندن دوره‌ی بازپروری به آغوش گرم جامعه باز گشته است!



به راستی ما نیز در چنین شرایطی زندگی می‌کنیم. ما هم برای بیرون رفتن از این دنیای وانفسا کافی است که تنها یک گام در جهتی برداریم که بر این فضای سه‌بعدی منطبق نیست. جهتی که ما آن را نمی‌بینیم، همان‌گونه که موجود X بعد سوم را نمی‌دید. در حقیقت مشکل اینجاست که همه‌ی راههای فراری که به ذهن ما می‌رسند، از نظر هندسی بر دنیای خودمان منطبق‌اند.

مراجع

[۱] آرتین، امیل، *تابع گاما* ، برگردان: سعید ذاکری، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹

[۲] بیرشک، احمد و معیری، محمدطاهر ، *هندسه‌ی سال اول دبیرستان* (نظام قدیم، رشته‌ی ریاضی)، شرکت چاپ و نشر ایران، تهران، ۱۳۷۲

[۳] بیرشک، احمد و معیری، محمدطاهر ، *هندسه‌ی سال دوم دبیرستان* (نظام قدیم، رشته‌ی ریاضی)، شرکت چاپ و نشر ایران، تهران، ۱۳۷۳

[٤] بیرشک، احمد و معیری، محمدطاهر ، *هندسه‌ی سال سوم دبیرستان* (نظام قدیم، رشته‌ی ریاضی)، شرکت چاپ و نشر ایران، تهران، ۱۳۷٤

[۵] تسیپکین، آ.گ و گ.گ ، *فرمول‌های ریاضی* ، برگردان: و.روگوف، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۷۱